

钢筋混凝土平面问题单元模型研究

朱海堂¹, 吉瑞林², 张 静³

(1. 郑州大学环境与水利学院, 河南 郑州 450002; 2. 河南省第五建筑工程公司, 河南 郑州 450007; 3. 郑州市城市规划勘测设计研究院, 河南 郑州 450007)

摘 要: 针对现有钢筋混凝土平面单元模型所存在的问题, 建立了在各种配筋形式下钢筋混凝土平面问题四边形单元组合模型, 导出了这些模型的单元刚度矩阵的一般表达式. 与弥散单元模型的对比分析表明, 组合单元模型不仅符合有限元离散的基本理论, 而且可较精确地反映钢筋的实际结构作用, 具有较强的实用性.

关键词: 钢筋混凝土; 有限元; 单元模型; 刚度矩阵

中图分类号: TU 131.1 文献标识码: A

钢筋混凝土有限元单元模型能否反映结构的实际和材料的力学形态, 将对实际结构的有限元分析计算结果起着至关重要的作用, 而且模型离散的复杂与否, 也直接影响计算工作量和计算效率. 现有的钢筋混凝土单元有整体式、分离式和组合式三种模型^[1~4]. 整体式模型是将钢筋均匀弥散于整个单元中, 但不能反映结构的实际和材料的力学形态. 分离式模型虽符合结构实际, 但其离散复杂, 计算工作量大. 组合式模型既能符合结构实际, 离散也相对简单, 但目前对此模型大多只研究了平面四边形单元含一根纵向钢筋的情况, 而对含多根纵向钢筋、含一根或多根横向钢筋、同时含有纵向和横向钢筋情况下的平面四边形单元还缺乏深入、系统的研究. 本文分别对各种配筋情况下的钢筋混凝土平面问题四边形单元进行了分析, 导出了各种情况下的组合式模型单元刚度矩阵计算表达式.

1 钢筋混凝土有限元整体式和分离式模型分析

钢筋混凝土整体式模型和分离式模型如图 1 所示. 分离式模型是把钢筋和混凝土分别离散成单元. 此种模型虽能反映结构实际, 但对于复杂结构或配置较多钢筋的结构, 不仅离散复杂, 而且计算工作量也非常大, 因而实用性较差. 整体式模型是将钢筋弥散于整个单元中, 并把单元视为某种

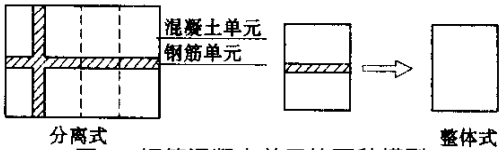


图 1 钢筋混凝土单元的两种模型

Fig. 1 Two-type models on reinforced concrete element
连续均匀材料, 相应的单元刚度矩阵可按一种材料的一般平面问题求得, 且弹性矩阵由钢筋和混凝土两部分组成:

$$[K] = \int [B]^T [D] [B] dV; \tag{1}$$

$$[D] = [D_C] + [D_S]. \tag{2}$$

式中 $[D_C]$ 为混凝土刚度矩阵 $[D_S]$ 为等效弥散钢筋的弹性矩阵. 若钢筋弹性模量为 E_S , 则

$$[D_S] = E_S \begin{bmatrix} \rho_x & 0 & 0 \\ 0 & \rho_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

式中 ρ_x, ρ_y 分别为沿 x, y 方向的配筋率.
式 (1) 和 (2) 表示的整体式钢筋混凝土有限元, 虽然计算简单, 但把钢筋和混凝土两种不同材料通过弥散作为一种材料处理后, 再考虑钢筋的轴向作用而忽略横向影响和配筋后的综合作用, 就与实际材料的力学性能有较大差异, 而且把钢筋弥散于单元本身也不能反映钢筋混凝土的实际情况. 因此, 分别计算混凝土的刚度矩阵和钢筋的刚度贡献矩阵, 然后予以迭加, 从而求得整个单元的刚度矩阵, 是符合有限元的基本理论和计算方

法的.

2 钢筋混凝土组合式平面四边形单元模型

2.1 含一根钢筋的平面四边形单元

纵向含有一根钢筋的四边形单元,如图 2 所示. 设 ab 的长度为 l 横截面面积为 A .

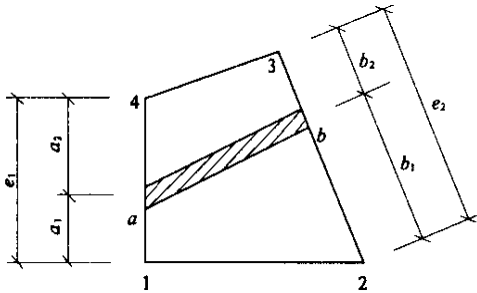


图 2 含纵向钢筋的四边形单元模型

Fig.2 Quadrangle element models with longitudinal bar

当无钢筋时,单元刚度矩阵可按一般的等参元方式给出^[4]:

$$[K_C] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D_C] [B] |J| t d\xi d\eta, (4)$$

式中 $[D_C]$ 为混凝土刚度矩阵 $[B]$ 为应变矩阵; $|J|$ 为雅可比行列式.

钢筋杆单元刚度矩阵可按平面杆单元计算^[4],即

$$[\overline{K_S}] = \frac{AE_S}{L} \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix} (5)$$

式中: $C = \cos\theta$; $S = \sin\theta$; θ 为 x 方向与杆轴线夹角.

设钢筋节点力与节点位移分别为 $[\overline{F_S}] = [X_a, Y_a, X_b, Y_b]^T$ $[\overline{\delta_S}] = [U_a, V_a, U_b, V_b]^T$ 且

$$[\overline{F_S}] = [\overline{K_S}] [\overline{\delta_S}] (6)$$

为计算钢筋杆对单元刚度矩阵的贡献,需要找出钢筋的节点力和节点位移与单元的节点力和节点位移之间的关系. 若分别给定节点沿某一坐标轴方向的单位位移,且其余各点位移不变,则钢筋节点位移与单元节点位移间的关系为

$$[\overline{\delta_S}] = \begin{bmatrix} U_a \\ V_a \\ U_b \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_2}{e_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_1}{e_1} & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{e_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_1}{e_1} \\ 0 & 0 & \frac{b_2}{e_2} & 0 & \frac{b_1}{e_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{b_2}{e_2} & 0 & \frac{b_1}{e_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

万方数据

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{bmatrix} = [R] [\delta_e] (7)$$

式中 $[R]$ 为坐标转换矩阵.

同理可得

$$[F_e] = [R]^T [\overline{F_S}] (8)$$

将式(6)和式(7)代入上式(8),可得 $[F_e] = [R]^T [\overline{K_S}] [R] [\delta_e]$ 若令

$$[K_S] = [R]^T [\overline{K_S}] [R] (9)$$

则有 $[F_e] = [K_S] [\delta_e]$ $[K_S]$ 为钢筋对单元的刚度贡献矩阵.

因此,含一根纵向钢筋的钢筋混凝土单元的刚度矩阵为

$$[K_{SC}] = [K_C] + [K_S] (10)$$

对于含一根横向钢筋的钢筋混凝土单元(如图 3 所示),按上述方法同样可以导出坐标转换矩阵为

$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{c_2}{e_3} & 0 & \frac{c_1}{e_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_2}{e_3} & 0 & \frac{c_1}{e_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d_1}{e_4} & 0 & \frac{d_2}{e_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d_1}{e_4} & 0 & \frac{d_2}{e_4} \end{bmatrix} (11)$$

相应的钢筋刚度贡献矩阵和单元的刚度矩阵与式(9)(10)的表达式相同.

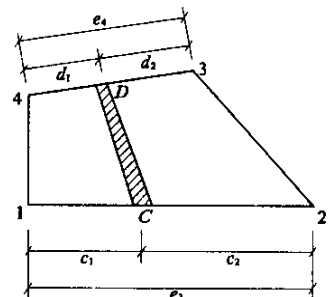


图 3 含横向钢筋的四边形单元模型

Fig.3 Quadrangle element models with transverse bar

2.2 含多根钢筋的平面四边形单元

若单元中含有 m 根纵向钢筋,第 i 根钢筋左

端距单元节点 1 4 分别为 a_{1i}, a_{2i} , 右端距单元节点 2 3 分别为 b_{1i}, b_{2i} , 如图 4 所示.

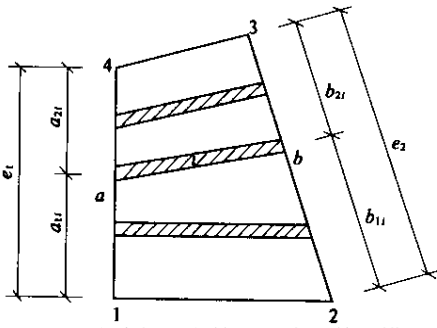


图 4 含多根纵向筋的四边形单元模型

Fig.4 Quadrangle element models with longitudinal bars

与上述方法相同,第 i 根纵向钢筋的坐标转换矩阵可表示为

$$[R_i] = [R(a_{1i}, a_{2i}, b_{1i}, b_{2i})], \quad (12)$$

即将式(11)中的 a_1, a_2, b_1, b_2 用 $a_{1i}, a_{2i}, b_{1i}, b_{2i}$ 替换.

第 i 根钢筋对单元的刚度贡献矩阵为

$$[K_{Si}] = [R_i] [\bar{K}_{Si}] [R_i], \quad (13)$$

m 根钢筋的总刚度贡献矩阵为

$$[K_S] = \sum_{i=1}^m [R_i] [\bar{K}_{Si}] [R_i], \quad (14)$$

式中 $[\bar{K}_{Si}]$ 为第 i 根钢筋的单刚矩阵,可由式(5)给出.

这样,含 m 根纵向钢筋的钢筋混凝土单元总的单元刚度矩阵为

$$[K_{SC}] = [K_C] + [K_S]. \quad (15)$$

式中 $[K_C]$ 为混凝土单元的单元刚度矩阵,可由式(4)给出.

对于含有多根横向钢筋的钢筋混凝土单元,只需作节点转换(1→2→3→4→1),就可以导出与式(11)~(14)相对应的刚度矩阵表达式.

2.3 同时含有多根纵、横向钢筋的平面四边形单元

设单元中含 m 根纵向钢筋,含 n 根横向钢筋,如图 5 所示.

由式(12)可知,第 i 根纵向钢筋的坐标转换矩阵为 $[R_i]$ 相应的刚度贡献矩阵为

$$[K_{Shi}] = [R_i] [\bar{K}_{Shi}] [R_i]. \quad (16)$$

式中 $[\bar{K}_{Shi}]$ 为第 i 根纵筋的单元刚度矩阵,由式(5)给出.

由式(11)可知,第 j 根横向钢筋的坐标转换矩阵为 $[R_j]$ 相应的刚度贡献矩阵为

$$[K_{Svj}] = [R_j] [\bar{K}_{Svj}] [R_j]. \quad (17)$$

式中 $[\bar{K}_{Svj}]$ 为第 j 根横筋的单元刚度矩阵,由式(5)给出.万方数据

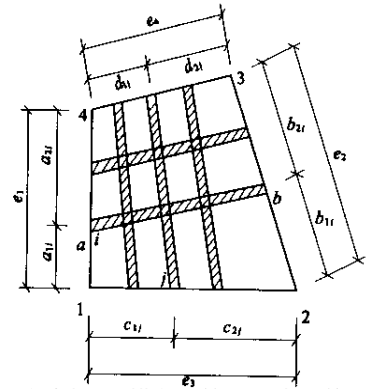


图 5 含多根纵、横向钢筋的四边形单元模型

Fig.5 Quadrangle element models with longitudinal and transverse bars

于是,钢筋的总刚度贡献矩阵为

$$[K_S] = \sum_{i=1}^m [K_{Shi}] + \sum_{j=1}^n [K_{Svj}], \quad (18)$$

钢筋混凝土平面四边形单元总刚度矩阵为

$$[K_{SC}] = [K_C] + [K_S]. \quad (19)$$

4 组合模型与弥散模型的对比

为了既不失一般性而又简明可信,以图 6 所示的平面矩形单元为例.由于纵筋配置在单元中间,单元厚度为 t ,钢筋横截面面积为 A_S ,横向配筋率为 $\rho_x = \frac{A_S}{2bt}$, $L = 2a$,则可以由式(1)~(3)计算得到弥散模型钢筋的刚度贡献矩阵为

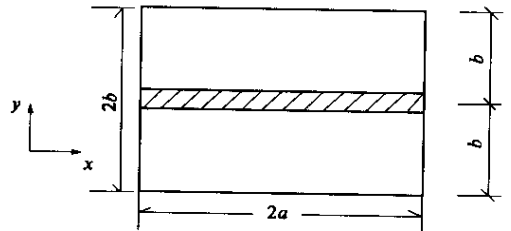


图 6 沿纵向配筋的四边形单元

Fig.6 Quadrangle element models with longitudinal bars

$$[K_S]_n = \frac{A_S E_S}{8a} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

由式(5)(8)(9)计算得组合式模型钢筋的刚度

贡献矩阵为

$$[K_S] = \frac{A_S E_S}{8a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{对} & & & & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{称} & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

从式 (20) 和 (21) 可以看出, 组合模型的刚度贡献矩阵主对角元素比弥散模型大, 这说明组合模型的单元刚度比弥散模型的单元刚度大, 也就是说, 弥散模型因“弥散”而削弱了钢筋的实际作用。

4 结束语

本文建立了平面问题的各种配筋形式下钢筋

混凝土四边形单元组合模型, 导出了这些模型的单元刚度矩阵的一般表达式。该模型不仅符合有限元离散的基本理论, 而且更符合结构的实际情况, 可较精确地反映结构实际受力状态下的内力变形情况及钢筋的实际结构作用, 具有较强的实用性。

参考文献：

[1] 吕西林. 钢筋混凝土结构非线性有限元理论与应用 [M]. 上海: 同济大学出版社, 1999.
[2] 沈聚敏, 王传志, 江见鲸. 钢筋混凝土有限元与板壳极限分析 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1993.
[3] 江见鲸. 钢筋混凝土结构非线性有限元分析 [M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 1994.
[4] 谢贻权, 何福保. 弹性和塑性力学中的有限单元法 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1981.

Research on Plane Finite Element Model of Reinforced Concrete

ZHU Hai - tang¹, JI Rui - lin², ZHANG Jing³

(1. College of Environmental & Hydraulic Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China; 2. The Fifth Building Company of Henan Province, Zhengzhou 450007, China; 3. Zhengzhou City Planning Survey Design & Research Institute, Zhengzhou 450007, China)

Abstract : In view of the shortcoming of reinforced concrete plane finite element models, the quadrangle compound models on reinforced concrete plane finite element in various forms of bars-arrangement are established. And the general expressions of the stiffness matrix of each type of the elements are worked out. By the contrastive analysis with the dispersion model, the compound model fits with the basic theory on finite element disperse, and can more exactly reflect the real structural function of bars as well. Furthermore, the model has more practicality.

Key words : reinforced concrete ; finite element ; model of element ; stiffness matrix