

文章编号:1671-6833(2003)01-0028-04

自由边半平面体裂纹问题的超奇异积分方程法

杜云海, 郭同德

(郑州大学工程力学系,河南 郑州 450002)

摘 要:对自由边半平面平行于界面的裂纹问题进行了研究.根据自由边半平面弹性体的弹性力学基本解,利用换功定律、位移—应变关系、胡克定律及裂纹岸应力边界条件,得到描述该问题的超奇异积分方程组,并通过积分变换,在有限部积分的意义下建立了相应的数值方法.对裂纹面上作用均布力情况的算例表明,在自由边附近,即便裂纹面上单独作用法向力或切向力,Ⅰ、Ⅱ型应力强度因子也同时存在,并发生剧烈的变化.

关键词:半平面; 裂纹; 超奇异积分方程; 应力强度因子

中图分类号: O 346.1 **文献标识码:** A

0 引言

许多工程结构及机械零部件,当研究其接近自由边界的裂纹问题时都可以简化为半无限大弹性体来处理,因此研究半无限大弹性体裂纹问题具有重要的工程应用价值.可以使用有限元、边界元等数值方法对该问题进行计算,但边界条件的确定,裂纹尖端单元奇异性问题,这些方法的应用具有一定难度.由希腊学者 N. I. Ioakimidis 首先引入到断裂力学的超奇异积分方程法^[1,2],以其未知函数在裂纹前沿具有较好性质的优点受到国际断裂力学工作者普遍关注,并开展广泛应用与研究.关于半无限大体裂纹问题的超奇异积分方程法尚无有关文献,本文从无裂纹半无限大平面弹性体在单位力作用下的弹性力学基本解出发,用超奇异积分方程法的基本思想,研究自由边界半无限大平面含平行于边界裂纹的问题,得到描述该问题的超奇异积分方程组,在有限部积分意义下建立相应的数值计算求解方法,并对裂纹面上作用均布力时自由边附近的应力强度因子进行计算.

1 超奇异积分方程

设自由边半无限平面弹性体中含有一平行于边界的线裂纹 Γ ,该裂纹与边界之间的距离为 c ,材料剪切弹性模量和泊松比分别为 G 和 μ ,在裂

纹左右岸 Γ^\pm 上作用大小相等、方向相反的分布力 $F_i(P)(i=1,2;P\in\Gamma)$.问题的应力边界条件为

$$\sigma_{ik}^\pm(P)=-F_i(P),(i=1,2;P\in\Gamma) \tag{1}$$

建立如图 1 所示坐标系.由两半平面对接的双材料无限大平面体在任点 $Q(\xi,\eta)$ 作用水平及竖直集中力时的应力场^[3,4]可以获得研究该问题的弹性力学基本解,以单位力作用下不含裂纹的双材料弹性体作为辅助状态,应用 Betti 换功定律,通过分析可以得到含裂纹弹性体在 $Q(\xi,\eta)$ 点用基本解表示的位移张量为

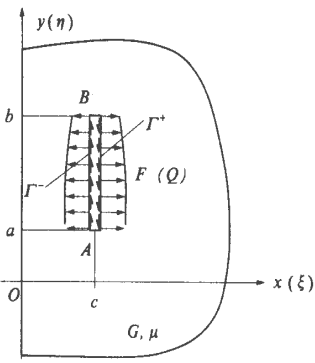


图 1 含平行于自由边界裂纹的半平面体
Fig. 1 half-plane body with a crack
Parallel to Free Boundary

$$u_k(Q)=-\int_{\Gamma^\pm}\sigma_{ik}(P,Q)\bar{u}_i(P)d\Gamma, \tag{2}$$

(i,k=1,2)

式中: $q_{ik}(P, Q)$ 为辅助状态下 $Q(\xi, \eta)$ 点的单位力在裂纹岸上任点 $P(y)$ 处引起的基本解应力分量; k 表示集中力方向; $\bar{u}_i(P) (i=1, 2)$ 为裂纹岸的位移间断.

由式(2), 利用位移—应变关系及广义 Hooke 定律可获得该裂纹问题的应力场, 再令 $Q \rightarrow \Gamma^+$, 即 $\xi \rightarrow c$, 代入边界条件(1), 并从积分项中分离出超奇异积分, 可得到描述该问题的超奇异积分方程组

$$\int_a^b \frac{\bar{u}_i(y)}{(y-\eta)} dy + \int_a^b K_{ik}(y, \eta) \bar{u}_k(y) dy = -\frac{\pi(\kappa+1)}{2G} F_i(\eta), \quad (i, k=1, 2) \quad (3)$$

其中: “ \int ” 为超奇异积分算子, 积分核 $K_{ij}(y, \eta)$ 的具体表达式为

$$K_{11}(y, \eta) = -\frac{1}{2(\kappa-1)} \{ (\kappa^2-2\kappa+1) \frac{1}{r_0^2} + [4(3\kappa^2-6\kappa-5)c^2 - (\kappa-1)(\kappa-3)(y-\eta)^2] \frac{1}{r_0^4} =$$

$$16[4(\kappa^2-5\kappa-10)c^4 + \kappa(\kappa-3)c^2(y-\eta)^2] \frac{1}{r_0^6} -$$

$$38[4(\kappa+1)c^6 - (\kappa-3)c^4(y-\eta)^2] \frac{1}{r_0^8} \};$$

$$K_{12}(y, \eta) = \frac{8}{(\kappa-1)} \{ (\kappa^2-1) \frac{c(y-\eta)}{r_0^4} - [4(\kappa^2-7)c^3(y-\eta) + (\kappa^2-1)c(y-\eta)^3] \frac{1}{r_0^6} +$$

$$12[4(\kappa-3)c^5(y-\eta) - (\kappa+1)c^3(y-\eta)^3] \frac{1}{r_0^8} \};$$

$$K_{21}(y, \eta) = 96 \left[\frac{c^3(y-\eta)}{r_0^6} - 8 \frac{c^5(y-\eta)}{r_0^8} \right];$$

$$K_{22}(y, \eta) = (\kappa-1) \frac{1}{2r_0^2} + [4(3\kappa+17)c^2 - (9\kappa+1)(y-\eta)^2] \frac{1}{2r_0^4} - [8(\kappa+9)c^4 -$$

$$2(\kappa-5)c^2(y-\eta)^2 - \kappa(y-\eta)^4] \frac{1}{r_0^6} + 4[16c^6 +$$

$$c^2(y-\eta)^4] \frac{1}{r_0^8},$$

式中: $r_0^2 = 4c^2 + (y-\eta)^2$; 在平面应力情况下, $\kappa = (3-\mu)/(1+\mu)$, 而在平面应变情况下, $\kappa = (3-4\mu)$.

由方程组(1)可以看出, 它包含两个未知裂纹位移间断函数, 只有通过联合求解上述超奇异积分方程组来确定未知函数 $\bar{u}_i(y) (i=1, 2)$, 问题的应力强度因子才能确定.

若裂纹远离自由边界, 即 $c \rightarrow \infty$, 有 $K_{ij} \rightarrow 0 (i, j=1, 2)$, 问题退化为无限大平面弹性体的裂

纹问题.

2 数值解法

引入无量纲变量 r, s :

$$y = \left[\frac{b-a}{2} \right] r + \left[\frac{b+a}{2} \right],$$

$$\eta = \left[\frac{b-a}{2} \right] s + \left[\frac{b+a}{2} \right]$$

和函数代换

$$\bar{u}(y) = \left[\frac{b-a}{2} \right] f_i(r),$$

$$H_{ik}(r, s) = \left[\frac{b-a}{2} \right]^2 K_{ik}(y, \eta),$$

$$g_i(s) = -\frac{\pi(\kappa+1)}{2\mu} F_i(\eta).$$

则可将式(3)正则化为

$$\int_{-1}^1 \frac{f_i(r)}{(r-s)} dr + \int_{-1}^1 H_{ik}(r, s) f_i(r) dr = g_i(s),$$

$$(-1 \leq s < 1; i=1, 2) \quad (4)$$

式中: $f_i(r) = F_i(r) \sqrt{1-r^2} (i=1, 2)$. 由裂纹位移间断沿裂纹岸变化的连续性, 知 $F_i(r)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上为有界连续函数. 将其近似表示为第二类 Chebyshev 多项式截断级数:

$$F_i(r) = a_{in} U_n(r), (i=1, 2; n=0, 1, \dots, N)$$

将上式代入正则化积分方程组(4), 可将其化为如下代数方程组

$$a_{kn} G_{ikn}(s) = g_i(s),$$

$$(i, k=1, 2; n=0, 1, \dots, N) \quad (5)$$

$$\text{式中: } G_{ikn}(s) = \delta_{ik} R_n(s) + \int_{-1}^1 H_{ik}(r, s) U_n(r)$$

$\sqrt{1-r^2} dr$, 这里 $R_n(s) = -\pi(n+1) U_n(s)$ 为含 Chebyshev 多项式超奇异积分项的有限部积分结果; δ_{ik} 为 Kronecker 数; a_{kn} 为待定系数.

为确定 a_{kn} , 需要配置足够的方程, 取第二类 $N+1$ 次 Chebyshev 多项式在开区间 $(-1, 1)$ 上的 $N+1$ 个零点作为配置点:

$$S_j = \cos \left[\frac{j}{N+2} \pi \right], (j=1, 2, \dots, N+1).$$

则可将式(5)离散为以下线性方程组

$$a_{kn} G_{ikn}(s_j) = g_i(s_j),$$

$$(i=1, 2; j=1, 2, \dots, N+1) \quad (6)$$

该方程组包含 $2(N+1)$ 个方程和 $2(N+1)$ 个未知数, 因而封闭可解.

由超奇异积分方程理论, 在裂纹端点 A, B , 应力强度因子的数值计算公式为

$$\begin{cases} K_{IA}=[2G/(\kappa+1)]\sqrt{(b-a)/2}F_1(-1) \\ K_{IB}=[2G/(\kappa+1)]\sqrt{(b-a)/2}F_1(1) \\ K_{IIA}=[2G/(\kappa+1)]\sqrt{(b-a)/2}F_2(-1) \\ K_{IIB}=[2G/(\kappa+1)]\sqrt{(b-a)/2}F_2(1) \end{cases} \quad (7)$$

采用Chebyshev 多项式在开区间 $(-1,1)$ 端点的极限值 $(\pm)^n(n+1)$, 有

$$F_k(\pm)=\sum_{n=0}^N(\pm)^n(n+1)a_{kn}, \quad (k=1,2) \quad (8)$$

利用方程组 (6) 求解 a_{kn} , 再由式 (7) (8) 即可计算应力强度因子.

3 算例

对图 1 所示的自由边半平面体裂纹问题, 假

表 1 自由边附近在裂纹面上作用均布力时的无量纲应力强度因子

Tab.1 Non-dimensional stress intensity factors of the crack close to free boundary under uniform pressure

$\frac{c}{b-a}$	$F_1(Q)=F_0, F_2(Q)=0$		$F_1(Q)=0, F_2(Q)=F_0$		$F_1(Q)=F_2(Q)=F_0$			
	$K_{IA}(K_{IB})$	$K_{IIA}(-K_{IIB})$	$K_{IA}(-K_{IB})$	$K_{IIA}(K_{IIB})$	K_{IA}	K_{IB}	K_{IIA}	K_{IIB}
0.02	49.233	35.239	-1.323	1.848	47.911	50.556	37.088	-33.392
0.05	14.025	8.823	-0.871	1.384	13.137	14.878	10.197	-7.428
0.1	5.951	3.031	-0.615	1.208	5.335	6.565	4.238	-1.822
0.5	1.511	0.185	-0.133	1.087	1.378	1.644	1.272	0.902
1	1.163	0.037	-0.033	1.043	1.113	1.196	1.080	1.006
2	1.045	0.005	-0.005	1.014	1.040	1.050	1.020	1.009
5	1.007	0.000	0.000	1.002	1.007	1.008	1.003	1.002
20	1.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

4 结论

本文对具有自由边界的半平面弹性体含平行于边界裂纹的问题进行了研究, 由文献 [3, 4] 中关于双材料平面在集中力作用下的应力场获得问题的弹性力学基本解, 利用换功定律获得问题的位移场, 由位移—应变关系及胡克定律, 通过微分及极限运算, 代入裂纹岸应力边界条件, 得到描述该问题的超奇异积分方程组, 并建立了相应的数值求解方法. 算例对裂纹面上作用有均布压力、均布切向力及二者联合作用的典型情况进行了计算, 结果表明: 即使在单一载荷作用下, 边界附近裂纹尖端仍呈复合型应力状态, 法向分布力作用下应力强度因子的大小对自由边尤为敏感, 裂纹距边界愈近, 应力强度因子增大愈快.

定在裂纹岸上作用大小相等、方向相反的均布力 $F(P)=F_0$ 或 $F_2(P)=F_0$, 令材料泊松比 $\mu=0.3$. 对不同的裂纹位置 $c/(b-a)$, 裂纹前沿应力强度因子的计算结果在表 1 中给出. 表中无量纲应力强度因子 $\bar{K}_k=K_k/[F_0\sqrt{(b-a)/2}]$ ($k=I, II$). 由计算结果可以看出: 在半平面的自由边附近, $c/(b-a)<5$, 自由边界的影响使得即便在单一载荷作用下两种应力强度因子也同时存在, 并随 $c/(b-a)$ 的减小而急剧增大, 法向分布力作用下边界的影响尤为突出; $c/(b-a)>5$ 时, 边界的影响已基本消失; 此外, 在两种均布力同时作用下的应力强度因子显然为各均布力单独作用下的强度因子的线性叠加.

参考文献:

[1] IOAKIMIDS NI .A natural approach to the introduction of finite part integrals into crack problems of 3-dimensional elasticity[J] .Eng Fracture Mech , 1982, 16: 669~673.

[2] IOAKIMIDS NI .Application of finite part integrals to the singular integral equations of crack problems in plane and 3-dimensional elasticity[J] .Acta Mech , 1987, 26: 783~788.

[3] DUNDURS J ,HETENYI M .The elastic plane with a circular insert , loaded by a radial force[J] .App Mech , 1961,(1) : 103~112.

[4] HETENYI M ,DUNDURS J .The elastic plane with a circular insert , loaded by a tangentially force[J] .App Mech , 1962, (2) : 362~368.

Hyper-singular Integral Equation Method on Crack
in Half-plane Body with Free Boundary

DU Yun-hai , GUO Tong-de

(Department of Mechanics Engineering ,Zhengzhou University , Zhengzhou 450002,China)

Abstract : The problem of the crack parallel to the free boundary in a half-plane body , with the distributed loads only at the crack surface is discussed in this paper .Based on the fundamental solution of the elastic mechanics on a half-plane body with the free boundary and using Bitt's law ,the stress displacement relation , Hooke's law and stress boundary condition of the crack ,the hyper singular integral equations to describe this problem are derived . Through suitable integral transforms the corresponding numerical method in the sense of the finite part integral of the hyper singular integral is established .Using this method ,the non dimensional stress intensity factors of the crack under the uniformly distributed loads are calculated .The result shows that I , II type stress intensity factors exist synchronously , and change greatly close to the free boundary , even if there is single normal or tangent direction load on the crack boundary .

Key words : half plane ; crack ; hyper singular integral equation ; stress intensity factor

(上接第 23 页)

Effect of Soil Nonlinearity on Horizontal Displacement of Soil cement Retaining Wall

LIU Zhong-yu¹ , LI Yong-zhen²

(1.College of Civil Engineering ,Zhengzhou University ,Zhengzhou 450002,China ; 2.Henan Jianda Engineering Construction Supervision Company , Zhengzhou 450002,China)

Abstract : By introducing the hyperbola model to characterize the nonlinear interaction between the soil and the soil-cement retaining wall ,assuming the wall as a rigid body and considering the effect of shearing and overturning resistance of its weight and the soil below the wall ,a set of nonlinear equations to express its balance are presented and solved by converting them into a corresponding extremum problem .The results illustrate that the horizontal displacement vs cutting depth curve by the hyperbola model is basically similar to that by linearity model , but the horizontal displacement solved by the former is greater and the difference between the distributions of soil pressure solved by the models becomes greater with the cutting depth ,that is ,the effect of soil nonlinearity is obvious .

Key words : soil cement ; retaining wall ; horizontal displacement ; soil pressure ; nonlinearity