

文章编号: 1671-6833(2003)03-0087-04

# 对称变换在对称型微结构建模中的应用

郑艳萍<sup>1</sup>, 赵江铭<sup>2</sup>, 曹遂军<sup>3</sup>

(1. 郑州大学机械工程学院, 河南 郑州 450002; 2. 上海大学机电工程与自动化学院, 上海 200072; 3. 河南省中州煤矿机械厂, 河南 郑州 450052)

**摘要:** 针对对称型微结构中经常遇到对称机构受到沿对称轴的外力作用下的建模问题较复杂, 提出了一种把对称变换用于对称结构建模的方法, 推导出任意两个关于 X 轴、Y 轴和原点对称的结构间的对称变换关系. 该方法既能充分利用结构的对称性简化求解过程, 又能兼顾外力对该结构整体变形及约束反力的非对称性影响, 有效地提高了建模效率, 减少了建模过程中的失误. 通过对蟹脚型微谐振器建模实例的验证, 说明此方法可以在对称型微结构建模中应用.

**关键词:** 对称变换; 对称型微结构; 力学模型

**中图分类号:** TH 703.8 **文献标识码:** A

## 0 引言

对工程技术人员而言, 建模是一个非常重要的问题. 在工程实际尤其是微机械中有很多模型具有对称性, 巧妙利用其对称性, 可得到一个相对简单的数学模型. 在通常情况下, 中心对称机构在受到外力作用时, 其约束反力是不对称的, 但当它只受到一沿其对称轴方向的外力时, 各约束反力虽然可能不具备中心对称性, 却会关于该轴对称. 因此, 在针对对称型微结构建立力学模型时, 不能像文献 [1, 2] 那样根据其结构特点取其被两个对称轴分割后的 1/4 结构来建模, 否则会产生与实际情况有较大偏差的结论; 目前常用的是取水平对称轴一侧的部分, 即整个机构的 1/2 来建模 [3], 但此时直接建模往往需要大量的推导工作量, 增加了模型公式推导的难度. 为解决这个问题, 本文采用了一种利用对称变换和结构简化相结合的方法, 经验证能显著减小建模工作量, 减少推导过程中的失误.

## 1 对称变换关系的推导

对一对称型结构, 描述其状态的各物理量之间存在特定的关系, 这些关系往往由该结构本身的特性参数所决定, 而与坐标系的选取无关. 因此, 可在该机构中建立两类坐标系, 一类为固连在

各对称结构上的局部坐标系, 另一类为反映整个机构参数的固定坐标系. 在已知对称机构中任一结构各物理量关系的前提下, 利用坐标变换和对称关系, 推导出其余结构的各量所满足的新的关系. 本文简称这种方法为对称变换法.

结合图 1 可分析任意对称的两个独立结构变换前后的关系.

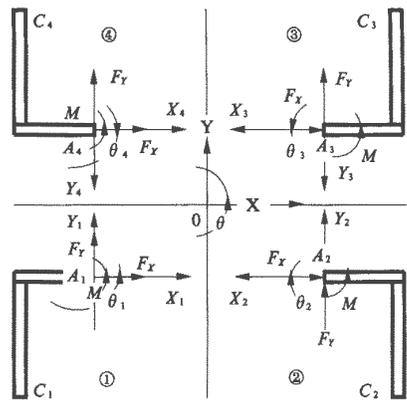


图 1 对称变换示意图

Fig. 1 Sketch of symmetrical transformations

图中共有四个独立的复合梁图形, 观察可知, 结构①与结构②、结构③与结构④关于 Y 轴对称, ①与④、②与③关于 X 轴对称, ①与③、②与④关于固定坐标系的原点 O 对称, 共有 3 类对称关系. 因此可用结构①与结构②分析关于 Y 轴的对称变换; 用结构①与结构④分析关于 X 轴的对称

收稿日期: 2003-03-16; 修订日期: 2003-06-07

作者简介: 郑艳萍 (1975-), 女, 河南平顶山市人, 郑州大学助教, 硕士, 主要从事先进制造技术、精密仪器与测试技术等方面的研究.

称变换;用结构①与结构③来分析关于坐标原点  $O$  的对称变换.

为方便说明,本文以二维平面运动为例,建立右螺旋坐标系  $XOY$ ,并取逆时针方向为转角的正方向.在此坐标系中,结构①中各量之间的关系如式(1):

$$\varphi(\Delta_x, \Delta_y, \Delta\theta, \alpha_x, \alpha_y, \beta_x, \beta_y, \gamma_0, \dots) = 0 \quad (1)$$

其中: $\Delta_x, \Delta_y$  分别代表点  $A$  所在处的横截面位移沿  $X$  轴、 $Y$  轴的分量; $\alpha, \beta, \dots$  等代表与点  $A$  有关而与转动无关的矢量(如  $A$  点处的受力、速度、加速度等); $\alpha_x, \beta_x, \dots$  可代表这些矢量在  $X$  轴上投影, $\alpha_y, \beta_y, \dots$  代表这些矢量在  $Y$  轴上投影; $\Delta\theta$  代表点  $A$  所在横截面的角位移沿转动正方向投影; $\gamma_0$  代表与点  $A$  有关的转动矢量(如  $A$  点处所受的力矩、 $A$  点所在的横截面转动角速度、角加速度等)沿转动正方向投影.

建立与复合梁固连于  $A$  点的局部坐标系  $X_1O_1Y_1$ ,定义  $\Delta_{x1}, \Delta_{y1}, \Delta\theta_1, \alpha_{x1}, \beta_{x1}, \alpha_{y1}, \beta_{y1}, \gamma_{01}, \dots$  为结构①中各量在坐标系  $X_1O_1Y_1$  中的投影,观察图 1 可知,该坐标系正方向与固定坐标系的正方向相同,故结构①各量在坐标系  $X_1O_1Y_1$  中的投影应满足方程:

$$\begin{aligned} & \varphi(\Delta_x, \Delta_y, \Delta\theta, \alpha_x, \alpha_y, \beta_x, \beta_y, \gamma_0, \dots) \\ & = \varphi(\Delta_{x1}, \Delta_{y1}, \Delta\theta_1, \alpha_{x1}, \alpha_{y1}, \beta_{x1}, \beta_{y1}, \gamma_{01}, \dots) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

下面我们通过对结构①与结构②、结构③、结构④之间坐标关系的分析,实现对称变换关系的推导.

### 1.1 关于 $Y$ 轴对称结构的变换分析

结构②可视为结构①沿  $Y$  轴水平翻转  $180^\circ$  得来,坐标系  $X_2O_2Y_2$  和  $X_1O_1Y_1$  均为固连于结构上的局部坐标系,因此各矢量在两个坐标系中的投影应满足同样的方程式,若结构②的各矢量对于坐标系  $X_2O_2Y_2$  的投影分别为  $\Delta_{x2}, \Delta_{y2}, \Delta\theta_2, \alpha_{x2}, \beta_{x2}, \alpha_{y2}, \beta_{y2}, \gamma_{02}, \dots$ , 则有:

$$\varphi(\Delta_{x2}, \Delta_{y2}, \Delta\theta_2, \alpha_{x2}, \alpha_{y2}, \beta_{x2}, \beta_{y2}, \gamma_{02}, \dots) = 0 \quad (3)$$

记各矢量对于固定坐标系的投影为  $\Delta_x, \Delta_y, \Delta\theta, \alpha_x, \beta_x, \alpha_y, \beta_y, \gamma_0, \dots$ , 观察可知坐标轴  $X_2$  与  $X$  的正方向相反,坐标轴  $Y_2$  与  $Y$  的正方向相同,故有: $\Delta_{x2} = -\Delta_x, \alpha_{x2} = -\alpha_x, \beta_{x2} = -\beta_x, \dots; \Delta_{y2} = \Delta_y, \alpha_{y2} = \alpha_y, \beta_{y2} = \beta_y, \dots; \Delta\theta_2 = -\Delta\theta, \gamma_{02} = -\gamma_0, \dots$ ; 将以上各式带入式(3),可得结构②的各矢量对固定坐标系

$XOY$  的投影满足如下方程式:

$$\varphi(-\Delta_x, \Delta_y, -\Delta\theta, -\alpha_x, \alpha_y, -\beta_x, \beta_y, -\gamma_0, \dots) = 0 \quad (4)$$

记此关于  $Y$  轴对称的变换为  $\varphi'$ , 则有:

$$\begin{aligned} & \varphi'(\Delta_x, \Delta_y, \Delta\theta, \alpha_x, \alpha_y, \beta_x, \beta_y, \gamma_0, \dots) \\ & = \varphi(-\Delta_{x1}, -\alpha_x, -\beta_x, \dots, \Delta_y, \alpha_y, \beta_y, \dots, -\Delta\theta, -\gamma_0, \dots) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

即只需将满足结构①的方程式(1)中各矢量沿  $X$  方向的分量、沿  $\theta$  方向的分量反号后,连同沿  $Y$  轴的分量一起带入式(1),稍经化简,即可得到结构②的相关方程.

### 1.2 关于 $X$ 轴对称结构和关于原点对称结构的分析

对于与结构①关于  $X$  轴对称的结构④,记此关于  $X$  轴对称的变换为  $\varphi''$ , 同理可由方程(1),得到其方程式:

$$\begin{aligned} & \varphi''(\Delta_x, \alpha_x, \beta_x, \dots, \Delta_y, \alpha_y, \beta_y, \dots, \Delta\theta, \gamma_0, \dots) \\ & = \varphi(\Delta_x, \alpha_x, \beta_x, \dots, -\Delta_y, -\alpha_y, -\beta_y, \dots, -\Delta\theta, -\gamma_0, \dots) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

即只需将满足结构①的方程式(1)中各矢量沿  $Y$  方向的分量、沿  $\theta$  方向的分量反号后,连同沿  $X$  轴的分量一起带入式(1),稍经化简,即可得到结构④的相关方程.

对于与结构①关于原点对称的结构③,亦可由方程(1),得到其方程式:

$$\begin{aligned} & \varphi'''(\Delta_x, \alpha_x, \beta_x, \dots, \Delta_y, \alpha_y, \beta_y, \dots, \Delta\theta, \gamma_0, \dots) \\ & = \varphi(-\Delta_x, -\alpha_x, -\beta_x, \dots, -\Delta_y, -\alpha_y, -\beta_y, \dots, \Delta\theta, \gamma_0, \dots) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

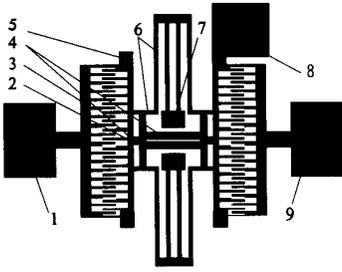
即只需将满足结构①的方程式(1)中各矢量沿  $X$  方向的分量、沿  $Y$  轴的分量反号后,连同沿  $\theta$  方向的分量一起代入式(1),稍经化简,即可得到结构③的相关方程.

## 2 应用实例分析

下面以蟹脚型微谐振器的建模为例,说明对称变换在建模中的应用.

蟹脚型微谐振器是一类应用较广的静电微谐振器,其结构简图如图 2 所示.由图知,该结构是典型的中心对称结构,通常该结构受力沿水平方向<sup>[1~3]</sup>,不妨假定作用力为  $2F$ ,据此取下半边建立简化模型如图 3 所示.

采用力法<sup>[4]</sup>进行求解时,往往需要求出梁  $AC, BD$  在端点  $A, B$  处受力及力矩的作用下,点  $A$  相对于点  $C$ 、点  $B$  相对于点  $D$  所产生的位移.



1,8,9—电极;2—可动电极;3—固定电极;  
4—质量块;5—防撞块;6—梁;7—锚点

图2 蟹脚型谐振器结构简图

Fig. 2 Sketch of the crab leg microresonator

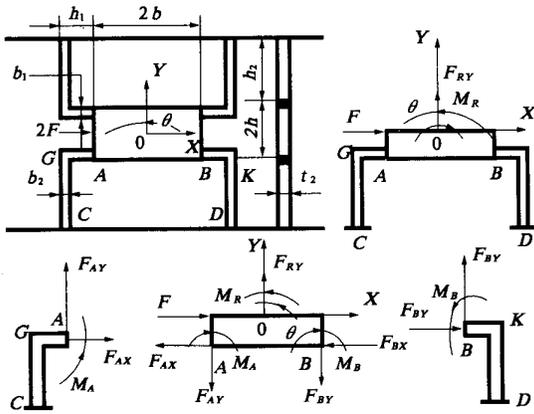


图3 蟹脚型谐振器模型及受力简图

Fig. 3 Model sketches of the crab leg microresonator and forces upon the m

由梁的小变形理论<sup>[4]</sup>可求出点G对点C、点A对点G的位移;由矢量叠加原理<sup>[3]</sup>知,点G对点C的位移与点A对点G的位移的矢量和即是点A对点C的位移:

$$\begin{cases} \Delta_{yCA} = \Delta_{yCG} + \Delta_{yGA} = -\frac{h_1 h_2^2}{2EI_2} F_{AX} + \left[ \frac{h_2}{EA_2} + \frac{h_1^3}{3EI_1} + \frac{h_1 h_2}{EI_2} \right] F_{AY} + \left[ \frac{h_1^2}{2EI_1} + \frac{h_1 h_2}{EI_2} \right] M_A \\ \Delta_{\theta CA} = \Delta_{\theta CG} + \Delta_{\theta GA} = -\frac{h_2^2}{2EI_2} F_{AX} + \left[ \frac{h_1^2}{2EI_1} + \frac{h_1 h_2}{EI_2} \right] F_{AY} + \left[ \frac{h_1}{EI_1} + \frac{h_2}{EI_2} \right] M_A \\ \Delta_{xCA} = \Delta_{xCG} + \Delta_{xGA} = \left[ \frac{h_1}{EA_1} + \frac{h_2^3}{3EI_2} \right] F_{AX} - \frac{h_1 h_2^2}{2EI_2} F_{AY} - \frac{h_2^2}{2EI_2} M_A \end{cases}$$

去掉上式中与AC梁有关的下标,记方程为

$$\begin{cases} \varphi_1 = -\Delta_y - \frac{h_1 h_2^2}{2EI_2} F_X + \left[ \frac{h_1^3}{3EI_1} + \frac{h_2}{EA_2} + \frac{h_1 h_2}{EI_2} \right] F_Y + \left[ \frac{h_1^2}{2EI_1} + \frac{h_1 h_2}{EI_2} \right] M = 0 \\ \varphi_2 = -\Delta\theta - \frac{h_2^2}{2EI_2} F_X + \left[ \frac{h_1^2}{2EI_1} + \frac{h_1 h_2}{EI_2} \right] F_Y + \left[ \frac{h_1}{EI_1} + \frac{h_2}{EI_2} \right] M = 0 \\ \varphi_3 = -\Delta_x + \left[ \frac{h_1}{EA_1} + \frac{h_2^3}{3EI_2} \right] F_X - \frac{h_1 h_2^2}{2EI_2} F_Y - \frac{h_2^2}{2EI_2} M = 0 \end{cases} \quad (8)$$

按传统方法求解点B对点D的位移时,和前述的计算方法一样,需要先求出点B对点K的位移与点K对点D的位移,而后叠加求出其矢量和,可得

$$\begin{cases} \Delta_{yDB} = \frac{h_1 h_2^2}{2EI_2} F_{BX} + \left[ \frac{h_2}{EA_2} + \frac{h_1^3}{3EI_1} + \frac{h_1 h_2}{EI_2} \right] F_{BY} + \left[ -\frac{h_1 h_2}{EI_2} - \frac{h_1^2}{2EI_1} \right] M_B \\ \Delta_{\theta DB} = -\frac{h_2^2}{2EI_2} F_{BX} + \left[ -\frac{h_1^2}{2EI_1} - \frac{h_1 h_2}{EI_2} \right] F_{BY} + \left[ \frac{h_1}{EI_1} + \frac{h_2}{EI_2} \right] M_B \\ \Delta_{xDB} = \left[ \frac{h_1}{EA_1} + \frac{h_2^3}{3EI_2} \right] F_{BX} + \frac{h_1 h_2^2}{2EI_2} F_{BY} - \frac{h_2^2}{2EI_2} M_B \end{cases} \quad (9)$$

而利用对称变换法来求解点B对点D位移的过程则要简单得多.考虑到复合梁AC与BD关于Y轴对称,应用关系式(5),将式(8)中的 $\Delta_x$ 换为 $-\Delta_x$ , $F_{AX}$ 换为 $-F_{AX}$ ; $\Delta\theta$ 换为 $-\Delta\theta$ , $M_A$ 换为 $-M_A$ ; $\Delta_y$ 和 $F_{AY}$ 保持不变,即得点B的相应关系式(10):

$$\begin{cases} \varphi_1^x = -\Delta_y + \frac{h_1 h_2^2}{2EI_2} F_X + \left[ \frac{h_2}{EA_2} + \frac{h_1^3}{3EI_1} + \frac{h_1 h_2}{EI_2} \right] F_Y + \left[ -\frac{h_1^2}{2EI_1} - \frac{h_1 h_2}{EI_2} \right] M = 0 \\ \varphi_2^x = \Delta\theta + \frac{h_2^2}{2EI_2} F_X + \left[ \frac{h_1^2}{2EI_1} + \frac{h_1 h_2}{EI_2} \right] F_Y + \left[ -\frac{h_1}{EI_1} - \frac{h_2}{EI_2} \right] M = 0 \\ \varphi_3^x = \Delta_x + \left[ -\frac{h_1}{EA_1} - \frac{h_2^3}{3EI_2} \right] F_X - \frac{h_1 h_2^2}{2EI_2} F_Y + \frac{h_2^2}{2EI_2} M = 0 \end{cases} \quad (10)$$

加上与梁  $BD$  对应的相关下标, 移项并化简后, 亦可得出式(9)。

由此可知, 用对称变换法得到的结果与用传统方法逐步求解得到的结果是一致的, 但是原本需要繁琐求解过程才能得出的结论, 只需要一个简单的符号代换即可得出, 极大地提高了工作效率, 同时有效地降低了建模中的失误。

### 3 结论

当对称型微结构中的对称机构受到沿对称轴的外力作用时, 为提高建模效率, 采用对称变换法, 推导出任意两个关于  $X$  轴、 $Y$  轴和原点对称的结构间的对应变换关系如下。

(1) 两个关于  $Y$  轴对称的结构, 可将满足一个结构的方程式进行如下变换: 将各矢量沿  $X$  方向的分量、沿  $\theta$  方向的分量反号后, 连同沿  $Y$  轴的分量一起带入原方程式, 稍经化简, 即可得到另一结构所满足的方程;

(2) 两个关于  $X$  轴对称的结构, 可将满足一个结构的方程式进行如下变换: 将各矢量沿  $Y$  方向的分量、沿  $\theta$  方向的分量反号后, 连同沿  $X$  轴

的分量一起带入原方程式, 稍经化简, 即可得到另一结构所满足的方程;

(3) 两个关于原点对称的结构, 可将满足一个结构的方程式进行如下变换: 将各矢量沿  $X$  方向的分量、沿  $Y$  方向的分量反号后, 连同沿  $\theta$  方向的分量一起带入原方程式, 稍经化简, 即可得到另一结构所满足的方程。

以上3种变换可被广泛应用于对称型微结构的建模中。

### 参考文献:

- [1] HISANO A P. Resonant structure micromotors: historical perspective and analysis[J]. *Sensors and Actuators*, 1989, A20:83~89.
- [2] HISANO A P, CHO Young ho. Mechanical design issues in laterally driven microstructures [J]. *Sensors and Actuators*, 1990, A21~A23:1060~1064.
- [3] 陈晓阳, 宋晓钰, 沈雪瑾, 等. 蟹脚型微谐振器的横向振动分析[J]. *机械工程学报*, 2001, 37(7):37~40.
- [4] 孙训方. 材料力学[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979.
- [5] 哈尔滨工业大学理论力学教研室. 理论力学[M]. 北京: 人民教育出版社, 1982.

## Application of Symmetric Transformation to Modeling of Symmetrical Microstructure

ZHENG Yan-ping<sup>1</sup>, ZHAO Jiang-ming<sup>2</sup>, CAO Sui-jun<sup>3</sup>

(1. College of Mechanical Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China; 2. School of Mechanical Engineering & Automation Shanghai University, Shanghai 200072, China; 3. Zhongzhou Colliery Mechanism Company of Henan Province, Zhengzhou 450052, China)

**Abstract:** This paper discusses the mechanical preference of a certain widely used symmetrical microstructure forced by a force along its symmetrical axial. On the basis of symmetric transformation, a new modeling method for the symmetric microstructures is developed, by which the concision for the symmetry of the structure can be made full use of, and the effect by the force on the restraining forces thrown on the whole structure could be taken into account as well. So in this way the efficiency of modeling can be improved and the chance of error can be decreased too. It is deduced on the relationship of the symmetric transformation between two structures that was symmetry to the  $X$  axial,  $Y$  axial or the origin point respectively. And it was expatiated on the application on modeling for the symmetric transformation by setting up a factual mechanical modeling of a certain kind of micro resonator with crab leg like beam support.

**Key words:** symmetric transformation; symmetrical microstructure; mechanical modeling