文章编号:1671-6833(2004)01-0066-04

基于分数阶微分方程描述的系统的能控性和能观性判据

曾庆山[1], 冯冬青[2], 曹广益[1]

(1. 上海交通大学自动化系,上海 200030;2. 郑州大学电气工程学院,河南 郑州 450002)

摘 要:首先给出了由分数阶微分方程描述的系统的数学模型,根据对整数阶系统能控性和能观性的研究,给出了此类分数阶系统的能控性和能观性的定义,并利用两参数的Mittage-Leffler函数和Cayley-Hamilton定理分析此类分数阶系统的能控性和能观性,推导由分数阶微分方程描述的系统能控性和能观性判据.当其能控性判别矩阵$\boldsymbol{M}$和能观性判别矩阵$\boldsymbol{N}$的秩为满秩时,分数阶系统是能控和能观的.

关键词:分数阶微分方程;分数阶系统;能控性;能观性

中图分类号:TP 273 **文献标识码**:A

0 引言

能控性和能观性的概念是由Kalman首先提出和研究的.它们是系统的两个基本特性,分别描述系统输入和状态以及状态和输出之间的关系,对于控制系统是非常重要的.实际系统通常大都是分数阶的[1],然而目前所有的控制系统均考虑为整数阶系统.之所以忽略系统的实际阶次是由于其复杂性和缺乏相应的数学工具.随着分数阶微积分理论的发展[2],其应用范围已有了显著的增加.

近些年来分数阶微积分理论也被应用于控制理论中,主要是关于分数阶控制系统的建模、分析和综合.现在,分数阶控制系统的研究越来越得到了广泛的关注.本文主要研究分数阶线性微分方程描述的系统的能控性和能观性.首先介绍了分数阶微积分的基本概念以及分数阶微分方程描述的系统的数学模型.利用Cayley-Hamilton定理以及两参数的Mittag-Leffler函数分别对此类分数阶系统的能控性和能观性进行分析和研究,给出了此类分数阶系统能控和能观的条件并进行了证明.所得能控性判据和能观性判据有助于对分数阶系统的分析与综合.

1 系统描述

1.1 分数阶微积分

分数阶微积分是关于任意阶微分和积分的理论,它与整数阶微积分是统一的,是整数阶微积分的推广.可用${}_aD_t^{\alpha}$来标记非整数阶微分和积分算子,其中α是任意实数.

$$ {}_aD_t^{\alpha}=\begin{cases}\dfrac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}, & \mathrm{Re}(\alpha)>0\\ 1, & \mathrm{Re}(\alpha)=0\\ \int_a^t (d\tau)^{-\alpha}, & \mathrm{Re}(\alpha)<0\end{cases} \qquad (1)$$

对于分数阶微积分有不同的定义,详见文献[2].因为由Caputo定义的分数阶微分组成的微分方程和整数阶微分方程具有相同形式的初始条件,所以在本文中用Caputo定义.

Caputo分数阶微分[3]定义为

$$ {}_aD_t^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t\frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau, \qquad (2)$$
$$(n-1<\alpha<n)$$

其中,$f(t)$在$[\alpha,t]$上连续且可微;$\Gamma(\cdot)$是Gamma函数.

Caputo定义的分数阶微分的Laplace变换公式为

$$L\{{}_0D_t^{\alpha}f(t);s\}=s^{\alpha}F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0) \qquad (3)$$

对分数阶微分有

$$ {}_aD_t^{\alpha}[{}_aD_t^{\beta}f(t)]={}_aD_t^{\beta}[{}_aD_t^{\alpha}f(t)]={}_aD_t^{\alpha+\beta}f(t) \qquad (4)$$

其中,α和β为实数.

两参数的Mittag-Leffler数在分数阶微积分

收稿日期:2003-10-03;**修订日期**:2003-11-10

基金资助:上海市科技发展基金资助项目(011607033)

作者简介:曾庆山(1963-),男,湖北省武汉市人,上海交通大学博士研究生,主要从事复杂过程的建模与控制、分数阶微分控制理论以及智能控制等方面的研究.

中起着十分重要的作用.其定义为[4]

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},(\alpha>0,\beta>0)\quad(5)$$

其Laplace 变换为

$$\int_0^{\infty}e^{-st}t^{\alpha k+\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm a t^{\alpha})\mathrm{d}t=\frac{k!\,s^{\alpha-\beta}}{(S^{\alpha}\mp a)^{k+1}}\quad(6)$$

1.2 分数阶系统

能用分数阶微分方程精确地描述其动态性能的系统称为分数阶系统.整数阶系统是分数阶系统的特例.描述分数阶系统的数学模型有分数阶微分方程、分数阶传递函数和分数阶状态空间表达式等.设系统由下列具有序列微分的分数阶微分方程和初始值描述:

$$ {}_0D_t^{\sigma_n}y(t)+\sum_{i=1}^{n-1}a_{n-i}\,{}_0D_t^{\sigma_{n-i}}y(t)+a_0y(t)=b_0u(t)\quad(7)$$

$$[{}_0D_t^{\sigma_k-1}y(t)]_{t=0}=0,(k=1,\cdots,n)$$

其中:$\sigma_k=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j,(k=1,\cdots,n),0<\alpha_j\leqslant1,(j=1,\cdots,n),\alpha_j=\alpha,\alpha$ 为分数.$a_i(i=0,1,\cdots,n-1)$,b_0 为任意常数.$u(t)$ 是系统的输入,$y(t)$ 是系统的输出.

对分数阶线性定常系统式(7),令

$$x_1(t)=y(t);$$

$$x_{i+1}(t)=D_t^{\sigma_i}y(t),(i=1,2,\cdots,n-1).$$

对 $x_i(t)$ 取分数 α 阶微分可得

$$D_t^{\alpha}x_i(t)=x_{i+1}(t),(i=1,2,\cdots,n-1);$$

$$D_t^{\alpha}x_n=-\sum_{i=1}^{n}a_{i-1}x_i(t)+b_0u(t).$$

则可得分数阶线性系统式(7)的状态空间表达式如下:

$$\begin{cases}D^{\alpha}W(t)=AX(t)+Bu(t)\\ y(t)=CX(t)\end{cases}\quad(8)$$

其中,$X(t)=[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]^{\mathrm{T}}$ 为状态变量.

2 能控性分析

现在研究分数阶线性系统(8)的能控性问题.考虑分数阶线性系统式(8),假设有输入 $u(t)$ 作用于系统,其中,$t\in[t_0,t_f]$.系统的初始状态为 X_0,输入使系统在时刻状态为 X_f,则称输入将 t_0 时刻的状态 X_0 转移到 t_f 时的状态 X_f.

根据对整数阶线性系统的能控性的研究[5,6],给出分数阶线性系统的能控性定义和判据如下:

定义 1　对分数阶系统式(8),在有限的时间间隔 $[t_0,t_f]$ 内如果存在容许控制 u,将 t_0 时刻系统的状态 X_0 在 t_f 时刻转移到状态空间的原点,则称分数阶系统式(8)的状态 X_0 在时间间隔 $[t_0,t_f]$ 上是能控的.

定义 2　如果在有限的时间间隔 $[t_0,t_f]$ 上系统的每一个状态 $X(t_0)$ 都是能控的,则称系统在 $[t_0,t_f]$ 上是完全能控的.

定理 1　如果分数阶系统(8)的能控性判别矩阵

$$M=[B,AB,A^2B,\cdots,A^{n-1}B]\quad(9)$$

的秩为 n,则该分数阶系统是能控的.

证明:不失一般性,我们假设系统的终止状态在状态空间的原点,并且初始时刻为零,即 $t_0=0$.

对状态方程式(8)取Laplace 变换,可得

$$s^{\alpha}X(s)-s^{\alpha-1}X(0)=AX(s)+BU(s);$$

$$X(s)=(s^{\alpha}I-A)^{-1}s^{\alpha-1}X(0)+(s^{\alpha}I-A)^{-1}BU(s).$$

对上式取Laplace 逆变换有

$$X(t)=L^{-1}[X(s)]=E_{\alpha,1}(At^{\alpha})X(0)+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[A(t-\tau)^{\alpha}]Bu(\tau)\mathrm{d}\tau\quad(10)$$

由状态完全能控性定义可知

$$X(t_f)=E_{\alpha,1}(At_f^{\alpha})X(0)+\int_0^{t_f}(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[A(t-\tau)^{\alpha}]Bu(\tau)\mathrm{d}\tau=0;$$

或

$$\begin{cases}E_{\alpha,1}(At_f^{\alpha})X(0)=-\int_0^{t_f}(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\cdot[A(t-\tau)^{\alpha}]Bu(\tau)\mathrm{d}t\\ E_{\alpha,\alpha}(At^{\alpha})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^kt^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\\ \quad=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\cdot A^k\end{cases}\quad(11)$$

由Cayley-Hamilton 定理可知每个方阵满足其特征方程,即 A 如果是一个 $n\times n$ 的方阵,具有下列特征多项式:

$$P(s)=\det(\lambda I-A)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0.$$

则有

$$P(A)=s^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0I=0$$

应用Cayley-Hamilton 定理,有

$$t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(At^{\alpha})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{\alpha(k+1)-1}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\cdot A^k=\sum_{k=0}^{n-1}\eta_k(t)\cdot A^k\quad(12)$$

将式(12)代入(11)中,可得

$$E_{\alpha,1}(At_f^{\alpha})\cdot X(0)=-\sum_{k=0}^{n-1}A^kB\cdot\int_0^{t_f}\eta_k(t_f-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (13)$$

令 $\int_0^{t_f}\eta_k(t_f-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau=\gamma_k$,

$$q=E_{\alpha,1}(At_f^{\alpha})\cdot X(0),$$

q 为一个 $n\times1$ 维的向量.

则式(13)即为

$$q=-\sum_{k=0}^{n-1}A^kB\gamma_k=-[B\ AB\ \cdots\ A^{n-1}B]\cdot\begin{bmatrix}\gamma_0\\ \gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_{n-1}\end{bmatrix} \quad (14)$$

如果系统是状态完全能控的,则任意给定的初始状态 $X(0)$,方程(14)有唯一解的充分必要条件是矩阵 $[B\ AB\ A^2B\ \cdots\ A^{n-1}B]$ 满秩,即其秩为 n.

证毕.

3 能观性分析

能观性的概念十分重要,因为在实际应用中,状态反馈控制常常会遇到状态不能直接测量到这样的困难.这时就要求估计出不可得到的状态变量,以实现状态反馈控制.

根据对整数阶线性系统的能观性的研究[5,6],给出分数阶线性系统的能观性定义和判据如下:

定义 3 如果在有限的时间间隔 $[t_0,t_1]$ 上利用得到的分数阶系统输入 $u(t)$ 和输出 $y(t)$ 能唯一地决定系统在初始时刻的状态 $X_0\neq0$,则称分数阶系统式(8)的状态 X_0 是能观的.

定义 4 如果在时间间隔 $[t_0,t_1]$ 上系统的每一个状态都是能观的,则称系统在 $[t_0,t_1]$ 上是完全能观的.

定理 2 如果分数阶系统式(8)的能观性判别矩阵:

$$N=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\\ \vdots\\ CA^{n-1}\end{bmatrix} \quad (15)$$

的秩为 n,则该分数阶系统是能观的.

如果系统由下列状态空间表达式描述:

$$D^{\alpha}X(t)=AX(t)+Bu(t);$$

$$y(t)=CX(t).$$

则

$$X(t)=E_{\alpha,1}(At^{\alpha})X(0)+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\cdot[A(t-\tau)^{\alpha}]Bu(t)\mathrm{d}\tau;$$

$$y(t)=CE_{\alpha,1}(At^{\alpha})X(0)+C\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\cdot E_{\alpha,\alpha}[A(t-\tau)^{\alpha}]Bu(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

因为矩阵 A,B,C 已知,而且 $u(t)$ 也知道,上面等式右边的最后一项就是已知量.由于它可以从观测到的 $y(t)$ 值中减去,因此研究系统完全能观性的充分必要条件时,考虑下式描述的系统就足够了.

$$D^{\alpha}X(t)=AX(t) \quad (16)$$

$$y(t)=CX(t)$$

下面我们证明定理2.

证明:对于分数阶系统式(16),其状态方程的解为

$$X(t)=E_{\alpha,1}(At^{\alpha})X(0).$$

则其输出向量 $y(t)$ 为

$$y(t)=CE_{\alpha,1}(At^{\alpha})X(0) \quad (17)$$

由Clayey-Hamilton定理,我们可得

$$E_{\alpha,1}(At^{\alpha})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^kt^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)}=\sum_{k=0}^{n-1}\eta_k(t)\cdot A^k,$$

因此,有

$$y(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\eta_k(t)\cdot CA^kX(0)$$

或

$$y(t)=\eta_0(t)CX(0)+\eta_1(t)CAX(0)+\cdots+\eta_{n-1}(t)CA^{n-1}X(0) \quad (18)$$

如果系统是完全能观的,则对于时间间隔 $0\leq t\leq t_1$ 上给定的 $y(t)$,$X(0)$ 由式(18)唯一确定,这就要求矩阵式(15)的秩为 n.

由此我们得出分数阶系统能观性矩阵 N 满秩时,系统是能观的.

证毕.

4 结论

本文研究了一类由分数阶微分方程描述的系统的能控性和能观性问题.利用两参数的Mittag-Leffler函数和Cayley-Hamilton定理,推导出了此类系统的能控性和能观性的充分必要条件,得到了相应的能控性和能观性的判据.由分数阶微分方程可得到系统的分数阶状态空间表达式,当分数阶系统的能控性判别矩阵 M 秩为满秩时,分

数阶系统是能控的;当分数阶系统的能观性判别矩阵 N 的秩为满秩时,分数阶系统是能观的.所得结论对于分数阶线性控制系统的分析与综合都是有益的.本文只是涉及了分数阶线性定常控制系统,关于分数阶线性时变控制系统的能控性和能观性,是值得继续进行研究的内容.

参考文献:

[1] TORVIK P J, BAGLEY R L. On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials [J]. Transaction of the ASME, 1984, 51: 294～298.

[2] PODLUBNY I. Fractional Differential Equations [M]. San Diego: Academic Press, 1999.

[3] CAPUTO M. Elasticiā e Dissipazion [M]. Bologna: Zanichelli, 1969.

[4] Erdélyi A. Higher Transcendental Functions [M]. New York: McGraw-Hill, 1953.

[5] CHEN C T. Linear Systems Theory and Design [M]. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1984.

[6] RUGH W J. Linear Systems Theory [M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1993.

The Controllability and Observability Criteria of Systems Described by Fractional Differential Equations

ZENG Qing-shan[1], FENG Dong-qing[2], CAO Guang-yi[1]

(1. Department of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China; 2. College of Electrical Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China)

Abstract: The mathematics model of the systems described by fractional differential equations is proposed. In terms of the controllability and observability analysis on integer-order linear systems, the definitions of controllability and observability for fractional-order systems are presented. The controllability and observability are mainly analyzed by using the Mittage-Leffler function in two parameters and Cayley-Hamilton theorem. The criteria of controllability and observability for such systems are derived. If the controllability criterion matrix and observability criterion matrix have full rank, then the fractional-order systems are controllable and observable.

Key words: fractional differential equation; fractional-order system; controllability; observability