文章编号:1671－6833(2004)02－0087－04

基于修正单纯形法的圆柱度误差优化评定

郑　鹏，雷文平，侯伯杰

(郑州大学机械工程学院,河南 郑州 450002)

摘　要:对圆柱度误差评定理论及应用进行了研究,建立了圆柱度误差评定的规划模型,探讨了误差评定的最小条件判据,提出直接求解规划模型的修正单纯形法,并给出了求解的步骤.最后对实际测量数据进行了误差评定,结果证明,该方法有较高的精度和速度.另外,此评定方法具有很强的通用性,对于其它形状误差的求解提供参考.

关键词:误差评定;圆柱度误差;修正单纯形法

中图分类号:TH 161.12　　　**文献标识码**:A

0　引言

随着现代生产对零件精度提出越来越高的要求,那么对于零件的形位误差评定也就显得尤为重要.其中圆柱度误差的评定就是一件比较复杂的工作,目前评定大多数采用最小二乘法,该评定方法计算简单快捷,但只能近似评定,不能保证按形状误差评定原则(即"最小条件[1]")评定.包容评定法则能严格的按照最小条件进行评定,它包括最小区域法、最小外接柱法、最大内接柱法三种方法.三种方法的实质在于按不同的准则求出相应的理想要素,在数学上属于极大值极小化问题或极小值极大化问题,是线性规划的范畴.

圆柱度误差评定算法的开发可归结为优化设计问题,而评定算法的关键在于提高运算速度,以满足通用、有效、准确的需要.本文提出了基于修正单纯形法的圆柱度误差评定方法,实际应用表明,该方法结果精确、运算速度快,且算法容易在计算机上实现.

1　圆柱度误差的评定模型

如图1所示,圆柱上各测点半径 R 与方位角 θ 及高度 z 之间的关系为 $r=f(\theta,z)$,在 $z=0$ 的平面内旋转轴线偏离 $(-x,-y)$,沿两方向与原轴线分别倾斜 α,β 角.则圆柱上各测点到评定基准轴线的距离可以用下式表示:

$$R(p;q)=r(q)+q^{T}j(p) \qquad (1)$$

其中,$p=(\theta,z)$;$q^{T}=(x,y,\alpha,\beta)$;$j(p)=[\cos\theta,\sin\theta,z\sin\theta,z\cos\theta]^{T}$;$p$ 为形成变量,表示圆柱表面形状所需的独立变量;q 为描述变量,表示确定评定基准轴线位置所需的独立变量;$r(p)$ 为测量数据,它是形成变量 p 的函数;$j(p)$ 为 p 的矢量函数.基于测量评定圆柱度误差的两点假设[2](小偏差假设和小误差假设)可推导出圆柱度误差的理想数学模型.

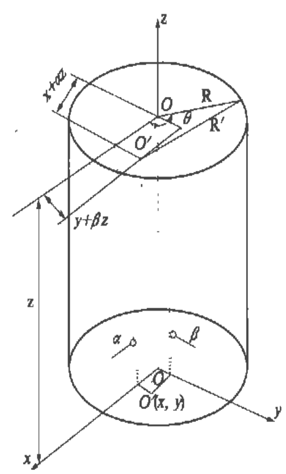

图1　圆柱度评定的几何模型图

Fig.1　The geometric model of cylindricity error

$$R(p;q)=r(\theta,z)+x\cos\theta+y\sin\theta+\alpha z\cos\theta+\beta z\sin\theta \qquad (2)$$

收稿日期:2004－01－12;**修订日期**:2004－03－05

基金项目:河南省自然科学基金项目(004053100);郑州大学优秀青年骨干教师资助项目

作者简介:郑　鹏(1976－),男,河南省驻马店市人,郑州大学助教,硕士,主要从事CAD/CAM方面的研究.

对于确定的 q 值,用函数 $\bar{R}(q)$ 表示极大值点到评定基准的距离,用函数 $\underline{R}(q)$ 表示极小值点到评定基准的距离,它可表示如下:

$$\bar{R}(q)=\max\{R(p):p\in P\}=\max\{R_1,R_2\cdots,R_i\cdots R_n\} \quad (3)$$

$$\underline{R}(q)=\min\{R(p):p\in P\}=\min\{R_1,R_2\cdots,R_i\cdots R_n\} \quad (4)$$

式中:P 为形成变量 p 的测点集合,$i\in\{1,2,\cdots,n\}$;n 表示被测点的数目.

按最小区域法评定圆柱度误差,实质是寻找 $q=(x,y,\alpha,\beta)^{\mathrm{T}}$,使极差函数为极小.可写成:

$$\begin{cases}\text{minimize } \Delta(q)=\bar{R}(q)-\underline{R}(q)\\ \text{s.t. } q\in Q\end{cases} \quad (5)$$

式中:$\Delta(q)$ 为极差函数,Q 为 q 的可行集;q 不受约束,即 $q\in E^m$(m 为 q 的维数,$m=4$),当极差取得最小值时,达到最小区域,极差极小值 $\Delta(q')$ 就是圆柱度误差(的一半).

对于圆柱度误差评定,往往还需求其内、外作用表面.最大内接柱称为内作用表面;最小外接柱称为外作用表面.

最大内接柱评定实质是极大值极小化问题,

$$\begin{cases}\text{minimize } \bar{R}(q)\\ \text{s.t. } q\in E^4\end{cases} \quad (6)$$

最小外接柱评定实质是极小值极大化问题,

$$\begin{cases}\text{maximize } \underline{R}(q)\\ \text{s.t. } q\in E^4\end{cases} \quad (7)$$

根据圆柱度误差数学模型,并利用线性规划的标准模型[3]可以得出圆柱度评定的规划模型.

圆柱面上的被测点以坐标(θ_i,z_i)来表示,其中 θ_i 为转角参数,z_i 为轴向坐标,它们决定了采样点位置,设 R_i 为采样点处测得的半径值,则有:

最小区域法评定

$$\begin{cases}\min\ w=u-v\\ \text{s.t. } u\geqslant R_i-x\cos\theta_i-y\sin\theta_i-\alpha z_i\sin\theta_i+\beta z_i\cos\theta_i\\ v\geqslant R_i-x\cos\theta_i-y\sin\theta_i-\alpha z_i\sin\theta_i+\beta z_i\cos\theta_i\\ u,v,x,y,\alpha,\beta\geqslant 0;i=1,2,\cdots,n\end{cases} \quad (8)$$

最小外接圆柱法评定

$$\begin{cases}\min\ w=u\\ \text{s.t. } u\geqslant R_i-x\cos\theta_i-y\sin\theta_i-\alpha z_i\sin\theta_i+\beta z_i\cos\theta_i\\ u,x,y,\alpha,\beta\geqslant 0;i=1,2,\cdots,n\end{cases} \quad (9)$$

最大内接圆柱法评定

$$\begin{cases}\min\ w=-v\\ \text{s.t. } v\leqslant R_i-x\cos\theta_i-y\sin\theta_i-\alpha z_i\sin\theta_i+\beta z_i\cos\theta_i\\ v,x,y,\alpha,\beta\geqslant 0;(i=1,2,\cdots,n)\end{cases} \quad (10)$$

式中:w 为目标函数;u 和 v 为特征参量,分别表示最大半径和最小半径.

2 最小条件判据

圆柱度误差评定的基本原则是遵循"最小条件",所建立的规划模型评定误差是否符合要求,还可以进一步用"最小条件"判据来进行校验[4].

由上述可知,$R(p;q)$ 为 q 的线性函数,$\bar{R}$ 为一凸函数,$\underline{R}$ 为一凹函数,理论证明对于圆柱度的最小区域法评定要使 minimize $\Delta(p;q)$ 成立的 q 必须满足:

$$\operatorname{conv}[\bar{R}(q)]\cap\operatorname{conv}[\underline{R}(q)]\neq\phi \quad (11)$$

对于最小外接、最大内接柱评定要求 q 满足:

$$0\in\operatorname{conv}[\underline{R}(q)]\ (0\in\operatorname{conv}[\bar{R}(q)]) \quad (12)$$

式中:$0\in\operatorname{conv}[\underline{R}(q)]$、$\operatorname{conv}[\bar{R}(q)]$ 为集合 R 的凸包;$\bar{R}(q)$ 为高值点集合映射;$\underline{R}(q)$ 为低值点集合的映射;$\cap$ 表示集合"与"运算;ϕ 表示空集.

最小条件的判别只与高、低值点的集合有关,式(11)、(12)满足时达到最小条件,否则未达到小条件,它是满足最小条件的充要条件.

3 规划模型的修正单纯形法求解

3.1 修正单纯形法

由上可知,在两点假设的条件下,圆柱度误差评定规划模型求解实际上是复杂线性规划的求解.标准线性规划的可行域是凸多面体,若非空,则必有基本可行解;若有最优解,则必有最优基本可行解.由此看来,只须进行基本可行解的叠代.单纯形法的寻优过程可以通过基本可行解来描述:①寻找一个初始基本可行解;②检查现行的基本可行解是否为最优;③从一个基本可行解叠代出使目标函数值下降的另一个基本可行解.

对于标准型线性规划问题

$$\min\ \boldsymbol{Z}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X},$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{X}\geqslant 0,$$

可写为

$$\begin{cases}\min\ \boldsymbol{Z}=\boldsymbol{C}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_B+\boldsymbol{C}_N^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{X}_N\\ \text{s.t. } \boldsymbol{BX}_B+\boldsymbol{NX}_N=\boldsymbol{B};\boldsymbol{X}_B,\boldsymbol{X}_N\geqslant 0\end{cases} \quad (13)$$

式中:$X_B=(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)^{\mathrm{T}}$ 为基变量;$\boldsymbol{X_N}=(x_{m+1},\boldsymbol{x}_{m+2},\cdots,\boldsymbol{x}_n)^{\mathrm{T}}$ 为非基变量;$\boldsymbol{A}=(B,N)$,其中,$B=\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots\boldsymbol{a}_m$.

如令所有的非基变量的取值为零,即 $\boldsymbol{X_N}=0$,关于 $\boldsymbol{B}$ 的基本可行解是

$$X^{(0)}=\begin{bmatrix}X_B\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B^{-1}b\\0\end{bmatrix}\qquad(14)$$

对于任意满足 $AX=b$ 的 X 可写为

$$X=\begin{bmatrix}X_B\\X_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B^{-1}b-B^{-1}NX_N\\X_N\end{bmatrix}\qquad(15)$$

与其相应的目标函数值是

$$Z=C_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b+\sigma_N^{\mathrm{T}}X_N=Z^{(0)}+\sigma_N^{\mathrm{T}}X_N\qquad(16)$$

其中，$Z^{(0)}=C_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b$ 是与基本可行解 $X^{(0)}$ 对应的目标函数值，其中

$$\sigma_N^{\mathrm{T}}=C_N^{\mathrm{T}}-C_B^{\mathrm{T}}B^{-1}N\qquad(17)$$

σ_N 为与非基本变量 X_N 对应的检验向量，它的各个分量称为检验数．若 σ_N 的每个检验数均大于等于0，那么这个基本可行解就是最优解．

基本可行解的改进：如果现行的基本可行解X不是最优解，则需在原基本可行解X的基础上寻找一个新的基本可行解，并使目标函数值有所改善．换入变量的确定可按最小减少原则，换出变量的确定可按最小比值原则．

在利用上述单纯形法求解线性规划问题时，每次叠代计算繁琐，事实上，在计算过程中，我们所关心的只是如下一些资料：

(1) 基本可行解 $X_B=B^{-1}b$ 及其相应的目标函数值 $Z=C_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b$；

(2) 非基变量检验数 $\sigma_N^{\mathrm{T}}=C_N^{\mathrm{T}}-C_B^{\mathrm{T}}B^{-1}N$ 及其换入变量 x_k．

(3) 主元列元素 $B^{-1}a_k$ 以及换出变量 x_e．

由此可得到一组新的基变量及其新的可行基 B_1，只要求得 B_1，上述资料都可以直接从线性规划问题的初始资料计算出来．即任一基本可行解可以直接从原线性规划的标准型运用矩阵和向量运算产生，这就是修正单纯形法的一个特点．

修正单纯形法的另一个特点是 B^{-1} 的计算，即当可行基从 B 变换到 B_1 时，B_1^{-1} 可以直接通过 B^{-1} 求得．假设当前基为

$$B=(a_1,a_2,\cdots,a_{e-1},a_e,a_{e+1},\cdots,a_m)\qquad(18)$$

基变换用非基变量 x_k 取代基变量 x_e 得到新基 $B_1=(a_1,a_2,\cdots,a_{e-1},a_k,a_{e+1},\cdots,a_m)$，两个基相比仅相差一列．同时

$$\begin{aligned}B^{-1}B=B^{-1}(&a_1,a_2,\cdots,a_{e-1},a_e,a_{e+1},\cdots,\\&a_m)=(B^{-1}a_1,B^{-1}a_2,\cdots,\\&B^{-1}a_{e-1},B^{-1}a_e,B^{-1}a_{e+1},\cdots,B^{-1}\\&a_m)=I;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B^{-1}B_1=B^{-1}&(a_1,a_2,\cdots,a_{e-1},a_k,a_{e+1},\cdots,a_m)\\=&(B^{-1}a_1,B^{-1}a_2,\cdots,B^{-1}a_{e-1},\\&B^{-1}a_k,B^{-1}a_{e+1},\cdots,B^{-1}a_m),\end{aligned}$$

比较以上两式，可得

$$B^{-1}B_1=(e_1,e_2,\cdots,e_{e-1},B^{-1}a_k,e_{e+1},\cdots,e_m)$$

其中，e_i 表示第 i 个元素为1，其余元素均为0的单位向量，$B^{-1}a_k$ 为主元列元素．

设 $B^{-1}a_k=[a_{1k},a'_{2k},\cdots a'_{ek},a_{mk}]^{\mathrm{T}}$ 则不难求得 $B^{-1}B_1$ 的逆阵，令其为 E_{ek}，于是 $B_1^{-1}=E_{ek}B^{-1}$．由于初始 B^{-1} 是单位矩阵，因此在修正单纯形法的整个过程中不再需要计算基的逆阵了．

3.2 修正单纯形法求解步骤

规划模型的修正单纯形法求解过程为：

(1) 把一般线性规划问题化为标准形式；

(2) 根据线性规划问题的标准型，确定初始基本变量和初始可行基B，计算初始可行基B的逆阵 B^{-1}，得到初始基本可行解 $X_B=B^{-1}b$，$X_N=0$；

(3) 计算单纯形乘子 $\pi=C_BB^{-1}$，可得到目标函数当前值 $Z=C_BB^{-1}b=\pi b$；

(4) 计算非基变量检验数 $\sigma_N^{\mathrm{T}}=C_N^{\mathrm{T}}-C_B^{\mathrm{T}}B^{-1}N=C_N^{\mathrm{T}}-\pi^{\mathrm{T}}N$，若 $\sigma_N\geqslant0$，则当前解已是最优解，运算结束，否则转下一步；

(5) 根据 $\min\{\sigma_j\mid\sigma_j<0\}=\sigma_k$，确定非基变量 x_k 为换入变量，计算 $B^{-1}a_k$，若 $B^{-1}a_k\leqslant0$，则线性规划问题的可行集是无界的，即没有有限最优解，运算结束，否则转入下一步；

(6) 根据方程

$$\min\left\{\frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}a_k)_i}\middle|(B^{-1}a_k)_i>0\right\}=\frac{(B^{-1}b)_e}{(B^{-1}a_k)_e},$$

确定基变量 x_e 为换出变量；

(7) 用 a_k 代替 a_e 得到新基 B_1，由 $B_1^{-1}=E_{ek}B^{-1}$ 计算新基的 B_1^{-1}，求出新的基本可行解，$X_B=B_1^{-1}b$，$X_N=0$，重复步骤(3)～(7)，直至求出最优解．

4 计算机评定步骤及实例

基于上述原理的圆柱度误差评定步骤为：

(1) 将误差评定的规划模型化为标准形式；

(2) 输入各测点坐标值及误差测量值；

(3) 计算理想要素初值；

(4) 利用修正单纯形法求取线性规划的最优 Δ^*；

(5) 求取理想要素位置；

(6) 校验"最小条件"，若不满足"最小条件"，则改变修正单纯形算法的初始值并执行步骤(4)，

否则继续下一步;

(7) 输出理想要素位置和误差评定结果.

现评定一个 ϕ80 mm 轴的圆柱度,周向等间距测量12个点,角度间隔为30°;轴向等距离测量6个截面,间距100 mm,共72个点,测得值见表1.

表1 轴的测量数据

Tab.1 Data of axis μm

θ/(°)	截面 Z					
	1×10^5	2×10^5	3×10^5	4×10^5	5×10^5	6×10^5
0	5.73	7.92	12.70	8.34	6.15	2.23
30	6.32	4.81	3.33	2.00	8.82	9.47
60	10.3	5.65	4.31	5.88	7.10	4.98
90	5.90	2.75	1.28	5.29	3.32	2.37
120	6.44	7.82	10.11	6.17	4.73	5.69
150	3.14	2.40	4.86	5.68	3.22	2.45
180	2.17	5.00	8.12	4.78	3.94	5.92
210	5.74	7.83	11.03	3.74	5.80	8.51
240	7.25	4.32	3.29	7.68	5.64	2.63
270	3.64	9.21	8.41	6.64	4.17	9.22
300	8.22	6.00	3.24	7.36	4.91	4.28
330	2.79	4.29	9.46	6.13	5.63	3.64

表2列出了几种优化算法的最小区域评定结果,可以看出,步长加速法[5]、有效集法[6]和特征点法[7]也是常用的优化算法,都可用于形状误差评定.修正单纯形法与特征点法的计算值很接近,并比特征点法所计算的结果小,说明用此方法可以解出圆度误差较为精确的值,也说明了本文建立的圆柱度误差模型的可靠性.另外,本例求解过程中特征点法需循环7次,修正单纯形法仅循环五次,使运算速度得到显著提高.

表2 实例圆柱度误差计算结果比较

Tab.2 The compare of calculation results μm

方法	步长加速法	有效集法	特征点法	修正单纯形法
f	11.026	11.430	10.772	10.435

5 结束语

本文在建立出圆柱度误差评定的规划模型基础上,采用修正单纯形法进行了求解.实践证明,采用本文算法编制的评定程序具有计算准确、精度高、速度快等特点,这对于实际工程中圆柱度误差值迅速而准确的评定提供了较理想的方法.另外,该评定方法同样还可适用于其它形状误差的评定,所不同的是设计变量和目标函数不同,因此该方法具有一定的通用性和较好的实用性.

参考文献:

[1] 刘 健,安立邦,吴宏基.圆度柱误差评定的最小条件[J].计量技术,1990,(10):3~9.

[2] 熊有伦.精密测量的数学方法[M].北京:中国计量出版社,1989.

[3] 刘 健,王晓明.鞍点规划与形位误差评定[M].大连:大连理工大学出版社,1996.

[4] 郑 鹏,侯伯杰,曹智军.圆度误差置换算法的研究[J].郑州大学学报(工学版),2002,23(4):107~109.

[5] 丁爱玲.评定圆柱面形状误差的方法[J].山西机械,1998(9):26~28.

[6] 侯 宇.有效集法在形状误差评定中的理论与应用[J].计量学报,1996,17(1):70~73.

[7] 粟时平,李圣怡.基于鞍点规划法的形位误差计算机评定[J].计量学报,2003,24(1):26~28.

Optimization Evaluation of Cylindricity Error Based on Correctional Simplex Method

ZHENG Peng, LEI Wen-ping, HOU Bo-jie

(College of Mechanical Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China)

Abstract: This paper analyses the theory and application of cylindricity error evaluation, establishes a kind of programming model for evaluation of cylindricity error, and discusses the minimum conditions criterion. The correctional simplex method for direct solution of the programming model is proposed, and the process also is given. Finally, a cylindricity error has been assessed on the measured data, and the calculation results are shown in the paper. By the experiment results, this calculating method has properties such as high precision and high speed. On the other hand, it has wide usability and can be used to calculate errors of other forms.

Key words: error evaluation; cylindricity error; correctional simplex method