

文章编号:1671-6833(2004)04-0098-04

球坐标下时谐电偶极子的二阶矢量位

熊华俊¹, 王金凤²

(1. 中国电子技术标准化研究所, 北京 100007; 2. 郑州大学电气工程学院, 河南 郑州 450002)

摘 要: 当利用叠加原理求解激励源为时谐电偶极子的电磁场矢量边值问题时, 可以引入二阶矢量位将矢量问题转化为标量问题, 而时谐电偶极子在无限大空间中的二阶矢量位必须首先求得. 利用特殊函数间的转化关系和互易定理, 从无限大空间中时谐电偶极子的磁矢量位出发, 推导得到了球坐标下无限大空间中时谐电偶极子的二阶矢量位. 二阶矢量位的形式较磁矢量位复杂, 但为了在引入二阶矢量位后能方便的利用边界条件, 这种由简到繁的转化是必要的.

关键词: 二阶矢量位; 电磁场; 时谐电偶极子

中图分类号: TM 153 **文献标识码:** A

0 引言

在求解电磁场矢量边值问题时, 可以将场分解为关于某一方向的横电部分(TE) 和横磁部分(TM). 常见的几种曲线坐标系下, 这种分解将矢量问题转化为标量问题. 二阶矢量位的引入^[1] 可以实现场的这种分解, 并且对于磁准静态情况, 二阶矢量位公式清楚的表明在非导电区域仅用一个标量函数表示磁场, 有效地简化了问题. 时谐电偶极子是一种经常使用的激励源形式. 利用叠加原理求解时谐电偶极子的电磁场时, 需首先知道时谐电偶极子在无限大空间中的电磁场. 时谐电偶极子在无限大空间中的磁矢量位在很多电磁场教科书中都有叙述, 而时谐电偶极子在无限大空间中的二阶矢量位还没有见到专门的论述. 本文利用特殊函数间的转化关系和互易定理, 从无限大空间中时谐电偶极子的磁矢量位推导出球坐标下无限大空间中时谐电偶极子的二阶矢量位.

1 二阶矢量位

球坐标下二阶矢量位

$$\mathbf{W} = \mathbf{r} W_a + \mathbf{r} \times \Delta \mathbf{W}_b \tag{1}$$

式中: \mathbf{r} 是球径矢量; W_a 和 W_b 是两个标量函数, 分别满足标量亥姆霍兹方程:

$$\Delta^2 W_a + k^2 W_a = 0 \tag{2}$$

$$\Delta^2 W_b + k^2 W_b = 0 \tag{3}$$

式中, $k^2 = -j\omega(\sigma + j\omega\epsilon)$. 同时有

$$\mathbf{A} = \Delta \times \mathbf{W} \tag{4}$$

$$\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} \tag{5}$$

$$\mathbf{B} = \Delta \times \mathbf{A} = \Delta \times \Delta \times \mathbf{r} W_a - k^2 \Delta \times \mathbf{r} W_b \tag{6}$$

\mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的各分量为

$$E_r = -j\omega(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2})(r W_b) \tag{7}$$

$$E_\theta = -j\omega\left[-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial W_a}{\partial\phi} + \frac{\partial^2 W_b}{\partial\theta\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial W_b}{\partial\theta}\right] \tag{8}$$

$$E_\phi = -j\omega\left[\frac{\partial W_a}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial\phi\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial W_b}{\partial\phi}\right)\right] \tag{9}$$

$$B_r = (k^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2})(r W_a) \tag{10}$$

$$B_\theta = \frac{\partial^2 W_a}{\partial\theta\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial W_a}{\partial\theta} - \frac{k^2}{\sin\theta}\frac{\partial W_b}{\partial\phi} \tag{11}$$

$$B_\phi = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial^2 W_a}{\partial\phi\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial W_a}{\partial\phi}\right) + k^2\frac{\partial W_b}{\partial\theta} \tag{12}$$

从式(2)、(3) 和式(11)、式(12) 可知, 在非导电区域($k=0$) W_a 和 W_b 满足拉普拉斯方程, 并且 \mathbf{B} 可只由 W_a 表示. 若已知各场区的二阶矢量位, 则各场量均可以通过二阶矢量位获得.

2 无限大空间中时谐电偶极子的磁矢量位

如图 1 所示, 点 $P(r_0, 0, 0)$ 处一时谐电偶极子, 方向为 \mathbf{e} . 设场点和源点的矢径分别是 \mathbf{r} 和 \mathbf{r}_0 , 空间中磁矢量位

收稿日期:2004-08-10; 修订日期:2004-09-20

作者简介:熊华俊(1977-), 男, 江西省丰城市人, 中国电子技术标准化研究所工程师, 硕士, 主要从事电磁场理论及其应用方面的研究.

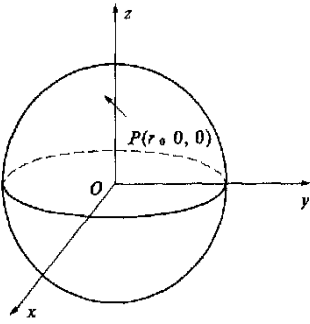


图1 无限大空间中的时谐电偶极子

Fig.1 A current dipole in infinite space

$$A = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi R} e^{-jkR} = Ae \quad (13)$$

式中: $R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta}$ 为场点到源点的距离; e 为任意常单位矢量; $k = \sqrt{-j\omega\mu_0(\sigma + j\omega\epsilon)}$, $\text{Re}(k) > 0$; A 与变量 ϕ 无关. 式(13)右端 $\frac{e^{-jkR}}{R}$ 项可表示为第二类零阶球汉克尔函数, 并可以利用球汉克尔函数的加法公式展成级数形式^[3]:

$$\frac{e^{-jkR}}{R} = -jk h_0^{(3)}(kR) = -jk \cdot \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) j_n(kr_0) h_n^{(3)}(kr) p_n(\cos \theta), r > r_0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) h_n^{(3)}(kr_0) j_n(kr) p_n(\cos \theta), r < r_0 \end{cases} \quad (14)$$

3 球坐标下无限大空间中时谐电偶极子的二阶矢量位

无限大空间 $P(r_0, 0, 0)$ 处一电偶极子, 方向 $e_i (i = r, \theta, \phi)$, 设其二阶矢量位为

$$W_i = r W_{ai} + r \times \Delta W_{bi} \quad (15)$$

以直角坐标系为参考, 球坐标下3个单位矢量 e_r, e_θ 和 e_ϕ 都是空间的函数, 即在不同的位置 e_r, e_θ 和 e_ϕ 所指的方向不同, 但对于某一固定点, e_r, e_θ 和 e_ϕ 是唯一确定的, e_r, e_θ 和 e_ϕ 是常矢量, 例如在 P 点有 $e_r(P) = e_z, e_\theta(P) = e_x, e_\phi(P) = e_y$.

3.1 径向电偶极子

若 $e = e_r(P) = e_z$, 此时

$$A = Ae_z = A(e_r \cos \theta - e_\theta \sin \theta) \quad (16)$$

由 $B = \Delta \times A$ 可知, B 只有 e_ϕ 分量, 空间中只存在相对于径向的TM场, $W_{ar} = 0$.

$$B_\phi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (-r A \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (A \cos \theta) \right] = -\frac{j\omega\mu_0}{4\pi r_0} \frac{\partial e^{-jkR}}{\partial \theta} \quad (17)$$

与式(13)比较, 可得

$$W_{br} = -\frac{j\omega\mu_0}{4\pi k^2 r_0} \frac{e^{-jkR}}{R} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{(3)}(kr) p_n(\cos \theta), r > r_0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \kappa_n^{(3)}(kr) p_n(\cos \theta), r < r_0 \end{cases} \quad (18)$$

式中, $\beta_n^{(3)} = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi k r_0} (2n+1) j_n(kr_0)$, $\kappa_n^{(3)} = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi k r_0} (2n+1) h_n^{(3)}(kr_0)$.

3.2 切向电偶极子

取 $e = e_\phi(P) = e_x$, 此时

$$A = Ae_x = A(e_r \sin \theta \cos \phi + e_\theta \cos \theta \cos \phi - e_\phi \sin \theta) \quad (19)$$

B 的径向分量为

$$B_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left[-\frac{\partial}{\partial \theta} (A \sin \theta \sin \phi) - \frac{\partial}{\partial \phi} (A \cos \theta \cos \phi) \right] = -\frac{j\omega\mu_0}{4\pi r} \sin \phi \frac{\partial e^{-jkR}}{\partial \theta} = \frac{j k \omega \mu_0}{4\pi r} \cdot$$

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) j_n(kr_0) h_n^{(3)}(kr) p_n^1(\cos \theta) \sin \phi, r > r_0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) h_n^{(3)}(kr_0) j_n(kr) p_n^1(\cos \theta) \sin \phi, r < r_0 \end{cases} \quad (20)$$

以上推导利用了等式 $\frac{\partial}{\partial \theta} p_n(\cos \theta) = p_n^1(\cos \theta)$. 再利用等式^[3]

$$\frac{1}{r} b_n(kr) = (k^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2}) \left[\frac{r}{n(n+1)} b_n(kr) \right] \quad (21)$$

式中: $b_n(kr)$ 为球贝塞耳函数. 则式(20)与式(10)比较, 可得

$$W_{a\theta} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(3)}(kr) p_n(\cos \theta) \sin \phi, r > r_0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n^{(3)}(kr) p_n(\cos \theta) \sin \phi, r < r_0 \end{cases} \quad (22)$$

式中: $\alpha_n^{(3)} = \frac{j k \omega \mu_0}{4\pi} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} j_n(kr_0)$, $\eta_n^{(3)} = \frac{j k \omega \mu_0}{4\pi} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} h_n^{(3)}(kr_0)$.

为求得 $W_{b\theta}$, 需先求得 E_r , 这里利用互易定理求解 E_r . 无限大导体空间两电偶极子 $J_1 = I \delta(r - r_1) e_r$ 和 $J_2 = I \delta(r - r_2) e_\theta$, 分别位于 $Q(r', \theta', \phi')$ 和 $P(r_0, 0, 0)$ 点, Q 和 P 点对应的矢径为 r_1 和 r_2 . 过 OQ 引一极轴建立另一球坐标系 $O-r \xi \delta$ 如图2, 坐标系 $O-r \xi \delta$ 通过原球坐标系 $O-r \theta \phi$ 绕 y 轴和 z 轴旋转 θ' 和 ϕ' 角度得到. 设 J_1 在 P 处的电场为 $E_1(r_2, r_1)$, J_2 在 Q 处的电场为 $E_2(r_1, r_2)$. $O-r \theta \phi$ 坐标系下极轴上径向电偶极子电场只有 e_r 和 e_θ 分量, 类比可得 $O-r \xi \delta$ 坐标系下 J_1

在 P 处电场只有 e_r 和 e_ξ 分量,其 e_ξ 分量为:

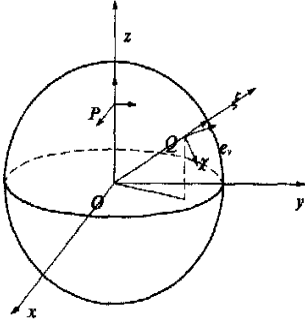


图 2 原坐标系和新坐标系

Fig. 2 Original and new coordinate systems

$$E_{1\xi}=\frac{-\omega\mu H}{4\pi kr(r)}.$$

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)j_n(kr')g_n(kr_0)p_n^1(\cos\theta)e_{\xi,r_0}>r' \\ \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)h_n^{(3)}(kr')q_n(kr_0)p_n^1(\cos\theta)e_{\xi,r_0}<r' \end{cases} \quad (23)$$

式中: $g_n(kr_0)=\frac{\partial}{\partial r}[\text{rh}_n^{(3)}(kr)]_{r=r_0}$, $q_n(kr_0)=\frac{\partial}{\partial r}[\text{nj}_n(kr)]_{r=r_0}$. 由互易定理知, Q 和 P 两点的场源具有如下关系:

$$\boldsymbol{J}_1\cdot\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=\boldsymbol{J}_2\cdot\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1),$$

即

$$\text{Il}\tilde{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=\text{Il}\tilde{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\cdot\boldsymbol{e}_e(P)\cdot\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1)=\text{Il}\tilde{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1) \quad (24)$$

利用坐标旋转后单位矢量间的变换关系^[3]有:

$$\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1)=E_{1\xi}(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1)(-\cos\phi'\boldsymbol{e}_x-\sin\phi'\boldsymbol{e}_y)+E_{1r}(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{e}_z \quad (25)$$

将式(25)代入式(24),得:

$$E_{2r}=-E_{1\xi}\cos\phi' \quad (26)$$

把 $Q(r',\theta',\phi')$ 看成动点,并把 (r',θ',ϕ') 换成为 (r,θ,ϕ) ,则可知位于点 $P(r_0,0,0)$ 处 e_θ 方向的电偶极子在 (r,θ,ϕ) 处电场的 e_r 分量为

$$E_r=E_{2r}=\frac{-\omega\mu H}{4\pi kr(r)}.$$

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)q_n(kr)h_n^{(3)}(kr)p_n^1(\cos\theta)\cos\phi,r>r_0 \\ \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)g_n^{(3)}(kr)j_n(kr)p_n^1(\cos\theta)\cos\phi,r<r_0 \end{cases} \quad (27)$$

利用等式(21),比较式(27)和(7),可得

$$W_{b\theta}=\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n^{(3)}(kr)p_n^1(\cos\theta)\cos\phi,r>r_0 \\ \sum_{n=0}^{\infty}\kappa_n^{(3)}(kr)p_n^1(\cos\theta)\cos\phi,r<r_0 \end{cases} \quad (28)$$

式中: $\beta_0=-\frac{j\mu H}{4\pi kr_0n(n+1)}q_n(kr_0)$; $\kappa_0=-\frac{j\mu H}{4\pi kr_0}\frac{(2n+1)}{n(n+1)}g_n(kr_0)$. 类似地,可以求出 $P(r_0,0,0)$ 处 e_ϕ 方向电偶极子的二阶矢量位:

$$W_{a\phi}=\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^{(3)}(kr)p_n^1(\cos\theta)\cos\phi,r>r_0 \\ \sum_{n=0}^{\infty}\eta_n^{(3)}(kr)p_n^1(\cos\theta)\cos\phi,r<r_0 \end{cases}$$

和

$$W_{b\phi}=\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n^{(3)}(kr)p_n^1(\cos\theta)\sin\phi,r>r_0 \\ \sum_{n=0}^{\infty}\kappa_n^{(3)}(kr)p_n^1(\cos\theta)\sin\phi,r<r_0 \end{cases} \quad (29)$$

式中: $\alpha_0=-\frac{j\mu H}{4\pi n(n+1)}j_n(kr_0)$; $\eta_0=-\frac{j\mu H}{4\pi}\frac{(2n+1)}{n(n+1)}h_n^{(3)}(kr_0)$; $\beta_0=-\frac{j\mu H}{4\pi kr_0n(n+1)}q_n(kr_0)$, $\kappa_0=-\frac{j\mu H}{4\pi kr_0n(n+1)}g_n(kr_0)$.

4 结束语

在推导时谐电偶极子二阶矢量位时,选择偶极子位于点 $\boldsymbol{r}_0=(r_0,0,0)$ 处,对于任意点 $\boldsymbol{r}'=(r,\theta',\phi')$ 处的时谐电偶极子,可以利用勒让德多项式和 n 次 1 阶球谐函数的加法公式^[3]将解进行转化.

无限大空间中时谐电偶极子的磁矢量位是以初等函数表达的,形式简单优美,而二阶矢量位却是复杂的级数形式.对于利用叠加原理求解激励源为时谐电偶极子的矢量边值问题,这种由简到繁的转化很有必要,不仅使矢量边值问题简化为标量边值问题,而且分界面上的边界条件也很容易得到满足.

参考文献:

[1] THEODOROS P Theodoulidis, N KOLAOS V Kantartzis, THEODOROS D, et al. Analytical and numerical solution of the eddy current problem in spherical coordinates based on the second order vector potential formulation[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1997, 33(4): 2461~2472.
[2] 刘鹏程. 工程电磁场简明手册[M]. 北京: 高等教育出版社, 1991.
[3] 熊华俊. 球导体中电流元的时谐电磁场[D]. 郑州: 郑州大学, 2003.

The Second order Vector Potential
Due to an Arbitrary Current Dipole in Spherical Coordinates

XIONG Hua-jun¹, WANG Jin-feng²

(¹Institute of China Electronics Standardization, Beijing 100007, China; ²College of Electric Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China)

Abstract : To solve the vector boundary value problem using superposition principle when the source is time harmonic current dipole ,we can introduce the second order vector potential (SOVP) to transform the vector problem into the scalar problem .And first we must get the SOVP of current dipole in infinite space .On the basis of the magnetic vector potential this paper derives the SOVP due to current dipole in infinite space in spherical coordinate system using the relation between special functions and reciprocal theorem .The SOVP of current dipole is complicated ,but this transformation is necessary in order that we can correctly use the boundary conditions .

Key words : second order vector potential ;electromagnetic field ;time harmonic current dipole

我校国家理科化学基地通过专家评估

我校国家理科基础科学研究和教学人才培养化学基地经过 10 年发展建设,终于迎来了硕果累累的金秋.10 月 22 日下午 6:00,在裕达国贸大厦会议室,评估专家组组长、厦门大学万惠霖院士宣读了对我校化学基地的验收评估报告.由教育部组织的专家组高度评价了我校化学基地取得的令人瞩目的成绩,充分肯定了化学基地建设的成功经验,认为郑州大学化学基地建设为地方院校发展建设理科基地提供了宝贵的经验.省教育厅厅长蒋笃运,校领导申长雨、邢莹、徐振鲁、焦留成、宋毛平、张连海等出席了反馈意见会.蒋笃运厅长对专家们两天来的辛勤工作表示感谢,他说,郑大力学基地顺利通过专家组的验收评估,是全体郑大人共同努力的结果,对专家们提出的建议,希望学校要高度重视,制定出整改措施.今后省教育厅要加大对郑州大学的投入,把全省惟一的 国家化学基地建设好.校长申长雨表示,一定把专家们的评估意见当成一种动力,以此次评估为契机,以评促改,以评促建,评建结合,找出差距,继续努力,把化学基地建设好,为国家培养出更多更好的优秀人才.

两天来,专家们听取了基地建设情况汇报,查阅了相关资料,考察了教学试验室和教学设施,听取了部分教师的课堂教学,召开了教师、学生及相关职能部门领导座谈会.经过认真讨论,一致认为:郑州大学化学基地建设已完成了预期建设目标中所提出的各项任务,达到了教育部和国家自然科学基金委员会对化学基地建设的各项指标和要求.