

文章编号: 1671-6833(2005)01-0013-03

改进的 Allman 无零能模式平面三角形单元

申长雨, 黄明, 赵振峰, 郭恒亚

(郑州大学橡塑模具国家工程研究中心, 河南 郑州 450002)

摘要: 基于原始的带有旋转自由度的 Allman 单元, 从转动分量定义出发, 对原始的 Allman 单元泛函位能 Π 进行了一些修正, 推导得到了一个新的单元. 该单元成功地消除了 Allman 单元的主要缺陷——多余零能模式, 同时保持了该单元的优点: 列式简洁、精度高, 给出的算例证实了改进单元的良好特性.

关键词: 有限元; 旋转自由度; 零能模式; 三角形单元

中图分类号: TB 115 **文献标识码:** A

0 引言

在平面问题有限元中, 严格地讲引入旋转自由度是多余的. 但是旋转自由度的存在可以提高单元的精度, 同时在壳体计算和框剪结构中提供了传统膜单元所不具备的附加自由度, 避免了旋转自由产生的病态. 关于此类单元的构造, Allman^[1] 用沿边界二次变化的位移模式构造单元的方法是一项开创性的工作, 目前被得到最广泛的应用^[2]. 由于 Allman 单元有一个多余零能模式的存在, 旋转自由度的意义也不明确, 针对这种情况, 许多学者在此基础上作了一些改进, 得到了一些新的单元. 早期的一些方法提高了精度和消除了多余零能模式, 旋转自由度的意义仍旧不明确^[3]; 文献^[4] 采用了 10 结点的三角形单元来构造高精度三角形单元, 这种单元旋转自由度有明确定义, 却做了一些假设, 导致单元过刚, 应用范围受到很大限制, 结果也过于繁琐; 文献^[5] 提出了在单元位移场上增加含内参的广义泡状位移方法, 具有计算精度高、对计算网格畸变不敏感的良好特性, 但是旋转自由度引入的插值部分仍与 Allman 单元相同; 文献^[6] 同样是通过增加内参位移的方法, 构造了有旋转自由度的三角形膜元, 并且引入了旋转自由度的定义.

随着有限元应用的普及, 过于复杂的单元只会给有限元知识欠缺的用户带来麻烦, 计算效率也不高, 所以在软件中尽量使用简单且精度高的

单元已成趋势^[7]. 本文作者考虑到模具 CAE 技术关于翘曲分析的特点^[8], 在原始的 Allman 单元的基础上构造出一简单实用的带旋转自由度的三角形单元, 以生成壳体单元进行翘曲分析, 该单元消除了多余的零能模式, 列式简单, 精度高.

1 转动角度的引入

在图 1 三角形单元中, 引入边中点作为结点后, 常规的 6 结点平面三角形单元插值函数为

$$\begin{cases} u = \sum_i N_i u_i \\ v = \sum_i N_i v_i \end{cases} \quad (1)$$

式中, N_i 为形函数:

$$\begin{cases} N_1 = (2\zeta - 1)\zeta \\ N_4 = 4\zeta_1\zeta_2 \\ N_5 = 4\zeta_2\zeta_3 \\ N_6 = 4\zeta_3\zeta_1 \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2)$$

式中: ζ 为单元面积坐标.

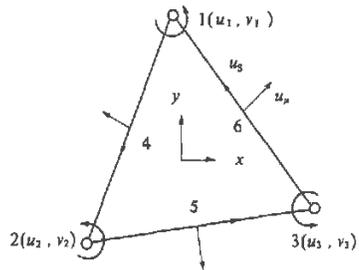


图 1 带旋转自由度的三角形单元

Fig. 1 Triangular element with drilling degree of freedom

收稿日期: 2004-09-10; 修订日期: 2004-10-20

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目(10225211)

作者简介: 申长雨(1963-), 男, 河南省南阳市人, 郑州大学教授, 博士生导师, 主要从事高分子材料成型模拟方面的研究.

Allman 单元的做法,是在单元角点引入转动角 θ ,然后消去边中间结点.为达此目的,可令沿边上各点的切向位移由两端结点的线性插值得到.以 1-3 边(结点 1 和结点 3 组成的边)为例,即为

$$u_{s6} = (u_{s1} + u_{s3}) / 2 \quad (3)$$

法向位移在该边上保持为二次插值如图 3 所示,设插值函数如下:

$$u_n = a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \quad (4)$$

记其在该边的转动(斜率)为 θ ,则有

$$\begin{cases} \theta = \frac{d u_n}{d x} = 2 a_1 x + a_2, \\ \frac{d \theta}{d x} = 2 a_1; \end{cases}$$

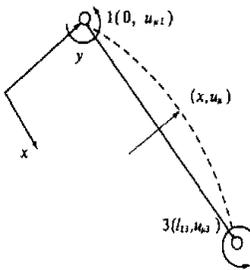


图 2 法向位移的插值

Fig. 2 Interpolation of normal displacement

另一方面,在结点 1,3 有转动参数 θ_1, θ_3 ,因此 u_n 的二次导数亦可用结点的转动参数表示:

$$\frac{d^2 u_n}{d x^2} = \frac{d \theta}{d x} = 2 a_1 = \frac{\theta_1 - \theta_3}{l_{13}} \quad (5)$$

l_{13} 为 1-3 边的长度.这里会产生一个问题:在角点的转动参数并不是 1-3 边专有,而是各个边公用.除非角点的剪切应变为零,否则转动参数并不等同于各个边的法向位移斜率.为此,我们在式(5)中加入一个待定系数,即令

$$a_1 = \frac{\alpha (\theta_1 - \theta_3)}{2 l_{13}} \quad (6)$$

同时考虑到

$$\begin{cases} u_{n1} = a_3 \\ u_{n3} = a_1 l_{13}^2 + a_2 l_{13} + a_3 \end{cases} \quad (7)$$

由式(6)、(7)解出式(4)中的系数,代入式(4),并取 $x = l_{13}/2$,有

$$u_{n6} = \frac{u_{n1}}{2} + \frac{u_{n3}}{2} + \frac{\alpha (\theta_3 - \theta_1) l_{13}}{8} \quad (8)$$

联合式(3)、(8),并应用下面的坐标转换公式(式中 β 为边的外法线与 x 轴的夹角):

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ u_s \end{Bmatrix},$$

则 u_6, v_6 可用结点参数 (u_i, v_i, θ) 表达,具体步骤从略.同理可以分别在 1-2 边和 2-3 边做同样的插值.整理后就得到整体坐标下的单元位移场函数为

$$\begin{cases} u = u_0 + \frac{\alpha}{2} (\theta_1 - \theta_2) b_3 \zeta_1 \zeta_2 + \frac{\alpha}{2} (\theta_2 - \theta_3) b_1 \zeta_2 \zeta_3 \\ \quad + \frac{\alpha}{2} (\theta_3 - \theta_1) b_2 \zeta_3 \zeta_1 \\ v = v_0 + \frac{\alpha}{2} (\theta_1 - \theta_2) c_3 \zeta_1 \zeta_2 + \frac{\alpha}{2} (\theta_2 - \theta_3) c_1 \zeta_2 \zeta_3 \\ \quad + \frac{\alpha}{2} (\theta_3 - \theta_1) c_2 \zeta_3 \zeta_1 \end{cases} \quad (9)$$

采用有限元方法中的循环指标记号,上式中 $b_k = y_i - y_j; c_k = c_j - c_i; u_0, v_0$ 为常应变单元位移函数:

$$\begin{cases} u_0 = u_1 \zeta_1 + u_2 \zeta_2 + u_3 \zeta_3 \\ v_0 = v_1 \zeta_1 + v_2 \zeta_2 + v_3 \zeta_3 \end{cases} \quad (10)$$

如果式(9)中的待定系数 α 取为 1,则等同于原始的 Allman 单元.

2 待定系数 α 的确定

如前所述,Allman 单元有一个多余零能模式的存在,转动自由度 θ 的意义也不明确.式(9)所得三角形单元插值函数是在 Allman 单元的基础上引入待定系数 α .我们将通过对待定系数 α 作适当的取值,试图使转动自由度 θ 与弹性力学中的旋转分量 ω 相等.根据旋转分量的定义,有

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)_i \\ &= \omega_0 + \frac{\alpha}{8A} [(\theta - \theta_j) (c_k b_j - c_j b_k) + (\theta_k - \theta) \cdot \\ &\quad (c_j b_k - c_k b_j)] \\ &= \omega_0 + \frac{\alpha}{4} (3\theta - \theta - \theta_2 - \theta_3) \end{aligned} \quad (11)$$

式中: A 为三角形面积; $\omega_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right)$ 为常应变转动部分.从式(11)中可以看到,假如同时满足下列条件:

$$\begin{cases} \alpha = 4/3 \\ \omega_0 - \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{3} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

那么就可使 $\omega = \theta$.因此,式(9)中的 α 应取作 4/3.

3 单刚的生成

为了实现式(12)的要求,进而消除多余的零

能模式, 这里对原始的 Allman 单元泛函位能 Π_p 进行了一些修正:

$$\Pi_p^* = \Pi_p + \frac{P}{2} \iint_e \left[\frac{1}{3}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - \omega_0 \right]^2 t dx dy,$$

其中, P 为罚因子, 本文取为剪切模量, 以使刚度矩阵中的元素处在同一量纲; t 为单元厚度; Π_p 基本上为原始的 Allman 单元对应的泛函, 但其中对应于式(9)的因子 α 由 1 改为 $4/3$. 离散后得到改进后的单元刚度矩阵 \mathbf{K} 就有两部分组成:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{e0} + \mathbf{K}_{e1} \quad (13)$$

其中 \mathbf{K}_{e0} 由位能 Π_p 离散变分后得到, \mathbf{K}_{e1} 由附加部分离散得到. 记

$$\frac{1}{3}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - \omega_0 = \mathbf{B}\mathbf{q},$$

由式(10)、(11), 可得

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{4A} & \frac{-b_1}{4A} & \frac{1}{3} & \frac{c_2}{4A} & \frac{-b_2}{4A} & \frac{1}{3} & \frac{c_3}{4A} & \frac{-b_3}{4A} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q} = \{u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad \dots \quad u_3 \quad v_3 \quad \theta_3\}^T,$$

从而附加的单刚为

$$\mathbf{K}_{e1} = Pt \iint_e \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx dy \quad (14)$$

4 算例

算例 1 悬臂梁(图 3)自由端受集中荷载, 这是一个标准算例. 已知: $E = 30\,000 \text{ Pa}$, $\nu = 0.25$, $P = 40 \text{ N}$, 图中尺寸单位以 m 计. 求 A 点的位移 V_A , 采用 2×8 网格进行计算, 计算结果见表 1.

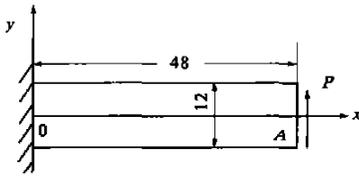


图 3 悬臂梁受集中荷载

Fig. 3 Cantilever beam subjected concentrated load

表 1 悬臂梁位移 V_A

Tab. 1 The V_A of cantilever beam m

边界条件	Allman	本文单元	精确解
$u=v=0$	—	0.340 9	0.357 3
$u=v=0$ $\theta=0$	0.330 0	0.322 1	0.357 3

算例 2 Cook 问题见图 4, 这是一个常被用来考察单元性能的标准算例. 已知材料性质和荷载

为: $E = 1 \times 10^9 \text{ Pa}$, $\nu = 1/3$, $P = 1 \times 10^6 \text{ N}$, 图中尺寸单位以 m 计. 这里对 A 点的挠度 V_A 进行考核, 结果见表 2.

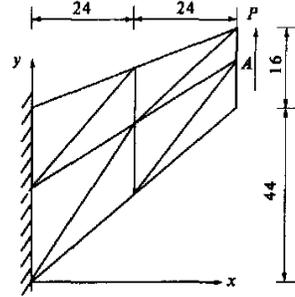


图 4 Cook 问题

Fig. 4 Cook problem

表 2 Cook 问题挠度计算结果比较

Tab. 2 The calculated results compare of Cook problem mm

网格	Allman	本文单元	参考值 ^[9]
2×2	17.51	16.90	23.96
4×4	21.73	21.19	23.96
8×8	23.79	23.40	23.96

以上算例表明, 当边界条件仅给出 $u=v=0$ 时, Allman 单元因存在多余零能模式而无法得出结果, 必须至少约束 1 个旋转自由度以消除总刚度矩阵的奇异性. 而改进后的本文单元消除了零能模式, 不需要约束旋转自由度. 即使在约束旋转自由度的条件下, 仍基本保持了 Allman 单元的精度.

5 结束语

纵观此类单元的构造方法, 多数过于复杂, 均不及 Allman 单元简洁. 因此笔者在 Allman 单元基础上, 对其仅进行了小的改造, 有效消除了原始 Allman 单元的多余零能模式, 得到一个简洁有效的带有旋转自由度的平面三角形单元, 以期与板单元相结合生成平板壳单元对模具薄壳制品进行翘曲分析. 算例表明, 消除零能模式的改进 Allman 单元, 仍保持了原有的精度, 具有很好的膜元性能. 由于此单元推导简单, 精度好, 无多余零能模式, 因而具有良好的实际应用前景.

参考文献:

[1] ALLMAN D J. A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis[J]. Computers & Structures, 1984, 19(1, 2): 1~8.

- [4] 张建仁, 刘 扬, 许福友, 等. 结构可靠度理论及其在桥梁工程中的应用[M]. 北京: 人民交通出版社, 2002.
- [5] 李广慧, 刘晨宇, 托拉欧·尼弗里奥. 响应面方法及其在桥梁体系可靠度分析中的应用[J]. 郑州大学学报(工学版), 2004, 25(3): 16~21.

Study on Live Load Parameter for Highway Bridge

LI Guang-hui¹, ZHANG Cun-chao¹, WANG Dong-wei¹, ZHANG Hui-jie²

(1.School of Civil Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China; 2.School of Civil Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract: We have been unable to make a reliability analysis about the highway bridge structure because the previous study lacks related statistical parameters about vehicle load in bridge specifications. Therefore, a study of the loading model must be enforced for developing an appropriate loading model for the system reliability analysis. The research in this paper based on the analysis of the WIM data from British Transportation Research Lab (tested last in two weeks in 1990) and the analysis program by Microsoft Visual Basic (6.0). Two main aspects are involved in it. The first one is to find out which trucks are the most frequent according to the probability they turn up. The second one is to count up these trucks' configurations, axle weigh, gross weigh respectively and the occurrence probability of more than one truck going side by side or in lane as the bridge span is variable. The statistical data concluded from this paper may be used to study reliability assessment of bridges once the resisting force-load model of bridge has been established.

Key words: bridge; truck configuration; maximum gross weight; occurrence probability of coincident trucks side by side or in lane

(上接第15页)

- [2] 张立洲. 带旋转自由度的精化平面三角形单元[J]. 辽宁工学院学报, 1999, 19(2): 10~14.
- [3] 须寅, 龙驭球. 采用广义协调条件构造具有旋转自由度的三角形膜元[J]. 工程力学, 1993, 10(2): 31~39.
- [4] 冯仲齐, 梅占馨. 有旋转自由度的高精度三角形单元[J]. 计算力学学报, 1998, 15(3): 293~300.
- [5] 须寅, 龙驭球, 龙志飞, 等. 引入泡状位移含旋转自由度的广义协调三角形膜元[J]. 工程力学, 2000, 17(3): 1~9.
- [6] 文学章, 龙驭球, 何放龙. 带旋转自由度的广义协调三角形膜元[J]. 工程力学, 2002, 19(6): 11~15.
- [7] FELIPPA C A. A study of optimal membrane triangles with drilling freedoms[J]. Computer Methods in Applied Mechanic Engineering, 2003, (192): 2125~2168.
- [8] 王利霞, 王 蓓, 申长雨. 工艺参数对注塑制品质量的影响研究[J]. 郑州大学学报(工学版), 2003, 24(3): 62~66.

The Allman's Element Without the Spurious Zero Energy Mode

SHEN Chang-yu, HUANG Meng, ZHAO Zhen-feng, GUO Heng-ya

(National Engineering Research Center for Advanced Polymer Processing Technology, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China)

Abstract: Based on the original Allman's element with drilling degree of freedom and the drilling degree definition, a modified element is presented by means of perfecting the variational functional Π_p of Allman's element in the paper. The spurious zero energy mode, which is the main shortcoming of Allman's element, is successfully removed. However, it still keeps the strong points of Allman's element: simplicity and high accuracy. The given examples show the good features of the element.

Key words: finite element method; drilling degree of freedom; spurious zero energy mode; triangle element