

文章编号:1671-6833(2005)02-0092-03

基于切应力条件的广义协调等参元

秦力一, 许德刚, 周爱民

( 郑州大学工程力学系, 河南 郑州 450002 )

摘 要: 非协调位移模式可有效改善计算精度, 但对任意非规则网格常不能满足收敛性条件. 根据线性边界力状态下的广义协调条件, 对任意不规则四边形单元构造出一种广义协调等参元. 该单元的导出考虑了线性切应力条件, 使单元间位移协调条件在加权残数意义上得以满足. 进一步给出了相应的广义协调应变函数矩阵, 模式紧凑而不易出现奇异性. 该等参元对任意不规则四边形网格能通过分片检验, 当单元为平行四边形时蜕化为 Q6 元. 算例表明, 该类型等参元精度较高, 对不规则网格剖分能保持良好的数值性态.

关键词: 广义协调; 等参元; 线性切应力  
中图分类号: TB 21; O 242.21 文献标识码: A

0 引言

为改进平面四结点等参元(Q4元)性态, Wilson等引入非协调位移模式(Q6元), 与内部自由度相关联, 对弯曲问题的计算精度显著改善, 其位移模式由两部分组成:

$$\{u\} = \{\bar{u}\} + \{\hat{u}\} \tag{1}$$

其中协调位移为双线性插值, 非协调位移模拟弯曲引起的形状变化. 对非平行四边网格, Q6元不能通过分片检验. 文献[1]和文献[2]中, 又分别根据常应力分片检验的强形式和广义协调条件导出非协调元NQ6和广义协调等参元GC-Q6.

本文作者仍应用常应力和线性应力下的广义协调条件, 导出另外一种广义协调等参元. 在单元导出过程避开形心位移条件, 而补充以边界线性切应力广义协调条件. 该非协调模式形式紧凑且不易出现奇异性.

1 线性边界应力下的广义协调条件

记  $u$  和  $\bar{u}$  为单元内部和边界位移变量. 非协调元不保证单元边界上处处满足条件  $u - \bar{u} = 0$ , 其相应的能量泛函应修正为[3]

$$\begin{aligned} \Pi_G &= \Pi_p - \sum_e \int_{\partial A_e} T^T(u - \bar{u}) dS; \\ \Pi_p &= \sum_e \int_{V_e} \left[ \frac{1}{2} \sigma_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} - F_i u_i \right] dV - \oint_{\partial A_e} P u_i dS, \end{aligned}$$

式中:  $\Pi_p$  为协调元相应的能量泛函;  $T$  为单元边界力函数;  $F_i$  和  $P_i$  分别为给定的体积力和面力. 用加权残值法可使单元间位移协调条件在某种积分意义上得以满足:

$$\oint_{\partial A_e} T^T(u - \bar{u}) dS = 0 \tag{2}$$

为保证单元收敛并保证计算精度, 考虑如下线性边界力状态:

$$T = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x(f_1 + f_2 \eta + n_y(f_5 + f_6 \eta) + \Delta) \\ n_y(f_3 + f_4 \zeta + n_x(f_5 + f_7 \zeta) + \Delta) \end{bmatrix} \tag{3}$$

式中:  $n_x, n_y$  表示单元边界外法线的方向余弦; 常应力项( $f_1, f_3, f_5$ )以保证单元通过小片检验, 线性项为提高计算精度  $f_6 \eta$  和  $f_7 \zeta$  二项相应于线性切应力状态; 其余各项( $\Delta$ )略去. 将式(3)及式(1)代入式(2)后, 注意到协调位移满足单元边界位移条件  $\bar{u} - \bar{u} = 0$  (在  $\partial A_e$  域), 可得

$$\begin{cases} \oint_{\partial A_e} \hat{u} n_x dS = 0 \\ \oint_{\partial A_e} \hat{u} n_y dS = 0 \\ \oint_{\partial A_e} \hat{u} n_x dS = 0 \\ \oint_{\partial A_e} \hat{v} n_x dS = 0 \\ \oint_{\partial A_e} \hat{v} n_y dS = 0 \\ \oint_{\partial A_e} (\hat{u} n_y + \hat{v} n_x) dS = 0 \\ \oint_{\partial A_e} \hat{v} n_y dS = 0 \end{cases} \tag{4}$$

收稿日期: 2005-01-20; 修订日期: 2005-03-20

基金项目: 河南省自然科学基金资助项目(954051500)

作者简介: 秦力一(1952-), 男, 山东省昌乐县人, 郑州大学副教授, 主要从事工程力学方面的教学科研工作.

2 广义协调位移

广义协调位移仍为完备的二次式

$$\hat{u} = \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \zeta + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \zeta^2 + \alpha_5 \zeta \eta + \alpha_6 \eta^2 \\ \beta_1 + \beta_2 \zeta + \beta_3 \eta + \beta_4 \zeta^2 + \beta_5 \zeta \eta + \beta_6 \eta^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

并记  $|J| = A + B\zeta + C\eta$ ,  $A = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ,  $B = a_1b_2 - a_2b_1$ ,  $C = a_2b_3 - a_3b_2$ , 且

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{4}(-x_1 + x_2 + x_3 - x_4), \\ a_2 &= \frac{1}{4}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4), \\ a_3 &= \frac{1}{4}(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4), \\ b_1 &= \frac{1}{4}(-y_1 + y_2 + y_3 - y_4), \\ b_2 &= \frac{1}{4}(y_1 - y_2 + y_3 - y_4), \\ b_3 &= \frac{1}{4}(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4), \end{aligned}$$

将式 (5) 代入广义协调条件 (4), 有

$$\begin{cases} 3b_3\alpha_2 - 3b_1\alpha_3 + 2b_4(\alpha_4 - \alpha_6) = 0, \\ 3b_1\alpha_1 + 3b_1\alpha_6 + 2b_2\alpha_3 + b_1\alpha_4 - b_3\alpha_5 = 0, \\ 3a_1\alpha_1 + 3a_1\alpha_6 + 2a_2\alpha_3 + a_1\alpha_4 - \alpha_3\alpha_5 = 0, \\ 3a_3\beta_2 - 3a_1\beta_3 + 2a_4(\beta_4 - \beta_6) = 0, \\ 3a_3\beta_1 + 3a_3\beta_4 + 2a_2\beta_2 + a_3\beta_6 - a_1\beta_5 = 0, \\ 3b_3\beta_1 + 3b_3\beta_4 + 2b_2\beta_2 + b_3\beta_6 - b_1\beta_5 = 0, \\ [3a_3\alpha_2 - 3a_1\alpha_3 + 2a_4(\alpha_4 - \alpha_6)] + \\ [3b_3\beta_2 - 3b_1\beta_3 + 2b_4(\beta_4 - \beta_6)] = 0 \end{cases} \quad (6)$$

将上式中最后一条件用其强形式表示, 分离为两方程:

$$\begin{cases} 3a_3\alpha_2 - 3a_1\alpha_3 + 2a_4(\alpha_4 - \alpha_6) = 0 \\ 3b_3\beta_2 - 3b_1\beta_3 + 2b_4(\beta_4 - \beta_6) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

可得 8 个广义协调条件. 利用这些条件可将 12 个参数  $\alpha, \beta$  中的 8 个参数  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_5$  用 4 个参数表示:  $\alpha_4, \alpha_6, \beta_4, \beta_6$ , 即

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{4}{9} \left( \frac{C}{A} \right)^2 (\alpha_4 - \alpha_6) - \frac{1}{3} \alpha_4 - \alpha_6, \\ \beta_1 &= \frac{4}{9} \left( \frac{B}{A} \right)^2 (\beta_4 - \beta_6) - \frac{1}{3} \beta_6 - \beta_4, \\ \alpha_2 &= -\frac{2}{3} \left( \frac{B}{A} \right) (\alpha_4 - \alpha_6), \\ \alpha_3 &= \frac{2}{3} \left( \frac{C}{A} \right) (\alpha_4 - \alpha_6), \\ \alpha_5 &= \frac{4}{3} \left( \frac{BC}{A^2} \right) (\alpha_4 - \alpha_6), \\ \beta_2 &= -\frac{2}{3} \left( \frac{B}{A} \right) (\beta_4 - \beta_6), \\ \beta_3 &= \frac{2}{3} \left( \frac{C}{A} \right) (\beta_4 - \beta_6), \end{aligned}$$

$$\beta_5 = -\frac{4}{3} \left( \frac{BC}{A^2} \right) (\beta_4 - \beta_6),$$

由此可得广义协调位移

$$\begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta^3 + H_1 & \eta^2 + H_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^2 + H_3 & \eta^2 + H_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_4 & \alpha_6 & \beta_4 & \beta_6 \end{bmatrix}^T \quad (8)$$

式中:

$$\begin{aligned} H_1 &= -\frac{4}{9} \left( \frac{C}{A} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{B}{A} \zeta - \frac{C}{A} \eta - \frac{2BC}{A^2} \zeta \eta \right) - \frac{1}{3}, \\ H_2 &= -H_1 - \frac{4}{3}; \\ H_3 &= \frac{4}{9} \left( \frac{B}{A} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{B}{A} \zeta - \frac{C}{A} \eta + \frac{2BC}{A^2} \zeta \eta \right) - 1, \\ H_4 &= -H_3 - \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

式 (8) 给出了满足常应力和部分线性应力(包括切应力和正应力)状态下广义协调条件的位移模式, 含 4 个广义位移参数. 在任意四边形之特殊情况——单元为平行四边形时, 则有  $a_2 = b_2 = 0$ ; 从而  $B = C = 0$ . 由于刚度阵和应变形函数阵的计算仅涉及形函数的导数, 故此时单元退化为 Wilson 的非协调等参元 Q6.

3 非协调应变形函数阵

对于本文的广义协调等参元, 其非协调(广义协调)模式的应变形函数阵为<sup>[4]</sup>

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}^T$$
$$\begin{cases} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \right]^T = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} b_3 + b_2 \zeta & -(b_1 + b_2 \eta) \\ -(a_3 + a_2 \zeta) & a_1 + a_2 \eta \end{bmatrix} \\ \left[ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right]^T \quad (i = 5, 6, 7, 8) \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \left[ \frac{\partial N_5}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_5}{\partial \eta} \right] = \left[ 2\zeta - \frac{2B}{3A} + \frac{4BC}{3A^2} \eta & \frac{2C}{3A} + \frac{4BC}{3A^2} \zeta \right] \\ \left[ \frac{\partial N_7}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_7}{\partial \eta} \right] = \left[ 2\zeta - \frac{2B}{3A} - \frac{4BC}{3A^2} \eta & \frac{2C}{3A} - \frac{4BC}{3A^2} \zeta \right] \\ \left[ \frac{\partial N_6}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_6}{\partial \eta} \right] = \left[ \frac{2B}{3A} - \frac{4BC}{3A^2} \eta & 2\eta - \frac{2C}{3A} - \frac{4BC}{3A^2} \zeta \right] \\ \left[ \frac{\partial N_8}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \right] = \left[ \frac{2B}{3A} + \frac{4BC}{3A^2} \eta & 2\eta - \frac{2C}{3A} + \frac{4BC}{3A^2} \zeta \right] \end{cases} \quad (10)$$

4 算例

矩形板(见图 1)采用不规则网格计算. 考虑两种荷载工作情况: 荷载 1 作用下均匀拉伸(常应

力分片检验的典型问题) ;荷载 2 作用下纯弯曲. 根据对称性取板 1/4 计算. 弹性常数  $E=1.0, \nu=0.25$ . 利用本文方法及若干种其它类型单元的计算结果列于表 1.

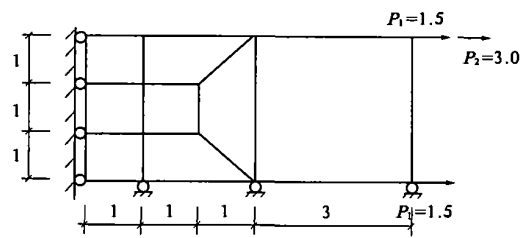


图 1 不规则网格剖分

Fig. 1 Irregular mesh subdivision

表 1 与其它类型单元计算结果的比较

Tab. 1 Comparason of numerical result some others

| 单元类型                        | 荷载 1        | 分片检验 | 荷载 2        |
|-----------------------------|-------------|------|-------------|
|                             | $u_A$ ( 位移) |      | $v_A$ ( 位移) |
| Q4( 等参元)                    | 6.00        | 通过   | -17.00      |
| Q6( Wilson) <sup>[3]</sup>  | 6.70        | 不通过  | -19.66      |
| QM6( Taylor) <sup>[4]</sup> | 6.00        | 通过   | -17.61      |
| QC6( 拟协调) <sup>[7]</sup>    | 6.00        | 通过   | -17.61      |
| 本文方法                        | 6.00        | 通过   | -18.60      |
| 精确解                         | 6.00        |      | -18.00      |

作者给出的广义协调等参元满足常应力下的广义协调条件,对不规则剖分网格也可通过分片检验;将其代入式  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [J] d\zeta d\eta = 0$ , 可知

满足收敛条件. 该种等参元还满足部分线性应力状态下的广义协调条件,对不规则剖分网格其数值性态良好. 由于补充了相应于部分线性切应力状态的广义协调条件,故不协调模式构造紧凑且便于计算.

参考文献:

[ 1 ] PIAN TH H, WU Chang —chun . General formulation of incompatible shape function and an incompatical isoparametric element [ C] . New York :Proc of the Invitational China —American Workshop on FEM, 1986. 159~165.

[ 2 ] 龙驭球,黄民丰. 广义协调等参元[ J] . 应用数学和力学, 1988, 9( 10) : 871~876.

[ 3 ] FRIED I . Shear in  $C^0$  and  $C^1$  bending finite elements[ J] . Int J .Solids Struct , 1973, 9, 449~460.

[ 4 ] 秦力一. 考虑非稳定蠕变及温度效应的碾压混凝土有限元分析[ J] . 计算力学学报, 1977, 14( 3) : 306~308.

[ 5 ] WILSON E L, TAYLOR R L, Donerty W P , et al . In —compatical displacement models in Numerical and Computer Method in Structural Mechanics [ M] . New York :Academic Press , 1973. 43~57.

[ 6 ] TAYLOR R L, BERESFORD P J, WILSON E L . A non —conforming element for stress analysis[ J] . Int . J . Num . Meth . Eng , 1976, 10, 1211~1220.

[ 7 ] 陈万吉,唐立民. 等参拟协调元[ J] . 大连工学院学报, 1981, 20( 1) : 63~74.

A Generalized Conforming Isoparametric Element Under Shear Stress Field

QIN Li —yi , XU De —gang , ZHOU Ai —min

( Department of Engineering Mechanics , Zhengzhou University , Zhengzhou 450002, China)

**Abstract :** The numerical precision can be effectively improved by non —conforming displacement , but the convergence criteria is not satisfied for the non —conforming quadrilaterals for arbitrary irregular mesh often . A new generalized conforming isoparametric element is formulated to arbitrary irregular quadrilateral for plane stress analysis . Under linear shear stress field , generalized compatibility condition is presented . In the sense of weighted residual the displacement is satisfactory to compatibility . And further , strain shape function matrix is given with generalized conforming modes . As compared with some existing others , the element can pass the patch test for arbitrary irregular mesh . When it is a parallelogram the element degenerates to Q6 . Numerical examples show that the element is less sensitive to geometric distortion and the result is better .

**Key words :** generalized conforming ; isoparametric element ; linear shear stress