

文章编号:1671-6833(2005)03-0094-04

# 求解三角形 Packing 问题的贴边算法

王瑞民<sup>1</sup>, 刘 磊<sup>2</sup>

(1. 郑州大学信息工程学院, 河南 郑州 450052; 2. 河南公安高等专科学校信息安全系, 河南 郑州 450002)

**摘 要:** NP 难度问题的求解一直是计算机科学技术的一个瓶颈任务. 自 20 世纪 70 年代以来的研究结果表明, 求解 NP 难度问题不存在既完整严格又不太慢的求解算法. 三角形 Packing 问题是 NP 难的. 本文给出了角区的分类, 并继续沿着拟人的途径, 给出了求解三角形 Packing 问题的贴边策略. 以贴边策略为基础发展出新的贴边拟人算法. 实验结果表明, 贴边拟人算法具有更高的完整性.

**关键词:** 三角形 Packing 问题; 贴边; 价值度; 拟人策略

**中图分类号:** TP 301

**文献标识码:** A

## 0 引言

自从 Cook 提出第一个 NP 难度问题以来, NP 难度问题的快速求解成为了上世纪末乃至本世纪计算机科学的瓶颈任务. 该类问题吸引了大量数学家和计算机科学理论学家的注意. 人们通过不同的途径对 NP 难度问题进行了研究. 但至今的研究结果表明: 对于 NP 难度问题根本就不存在经典数学家所希求的那种既完整又不是太慢的求解算法, 也就是说彻底的公理化的数学方法在这里没有多大用处<sup>[1,2]</sup>.

Packing 问题是比较困难的问题, 分为三维和二维 Packing 问题. 多边形 Packing 问题是其中二维 Packing 问题中比较复杂的问题, 已经证明了平移多边形的 Packing 问题是 NP 完全问题. 对于任意多边形的 Packing 问题(多边形既可平移又可旋转)是否为 NP 完全问题还没有得以证明<sup>[3,4]</sup>. 如何快速求解任意多边形的 Packing 问题, 目前国际学术界还没有给出令人满意的算法.

三角形 Packing 问题是多边形 Packing 问题的简化情况, 但其完整算法的时间复杂度仍然是指数型的. 必须从新的途径寻找快速高效的算法. 文献[5,6]分别对单位等边三角形和一般的三角形 Packing 问题进行了初步的研究, 得到了求解单位等边三角形和任意三角形 Packing 问题的拟人策略, 并沿着拟人的途径, 根据人们生产实践中处理

这类问题的经验, 发展出相应的求解算法.

本文作者对两相切三角形形成的角区进行了详细的分类; 并对任意的三角形 Packing 问题进行了深入研究, 沿着拟人的途径, 制订了新的拟人策略, 以新的拟人策略为基础, 得到了新的求解算法. 理论分析证明, 新算法与已有算法具有相同的时间复杂度. 但实验结果表明, 基于新策略的算法比已有算法具有更高的完整性.

## 1 角区的分类

三角形 Packing 问题是指: 已知长和宽一定的矩形空容器 R 和 N 个大小形状确定的三角形(每个三角形的三个边长已知), 问: 这 N 个三角形能否互不重叠地放入矩形容器 R 里? 若能, 则给出每个三角形在矩形容器里的位置和方向; 若不能, 则作出该算法放不下的回答.

文献[6]对该问题作了形式化的描述.

**定义 1** 角区: 已知两个相切的三角形, 在这两个三角形中各取一边, 若:

- (1) 两边有且仅有一个交点, 记该点为 O.
- (2) 这两边所在的射线(以 O 为端点)形成的角为小于  $\pi$  的正角.
- (3) 条件(2)中的角内不含有这两个三角形中除条件(1)外的其它边.

则(2)中的角称为这两个相切三角形的一个角区. 该角的大小记为该角区的角度. 两个三角形

收稿日期: 2005-03-04; 修订日期: 2005-05-09

基金项目: 郑州大学引进人才科研基金资助项目

作者简介: 王瑞民(1974-), 男, 河南省滑县人, 郑州大学讲师, 博士, 主要研究方向为密码学、网络安全和计算复杂性理论.

中和 2) 中的角的始边相重合的部分称为该角区的始边;两个三角形中和 2) 中的角的终边相重合的部分称为该角区的终边;称 1) 中的交点为该角区的顶点.

两个三角相切,可能有一个切点,也可能有多个切点.根据切点的多少,两个相切三角形的位置关系,可以分为:

- (1) 一个三角形的一个顶点和另外一个三角形的一个顶点相切;
- (2) 一个三角形的一个顶点和另外一个三角形的一个边相切;
- (3) 一个三角形的一个边和另一个三角形的一个边相切.

因此,两个三角形相切,有可能形成一个角区(图 1)、两个角区(图 2),也有可能不形成角区(图 3).

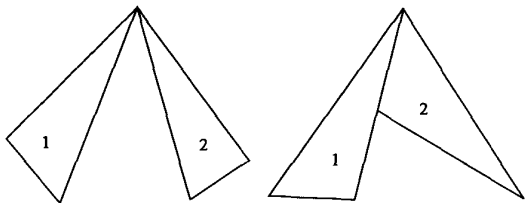


图 1 一个角区  
Fig. 1 One angle

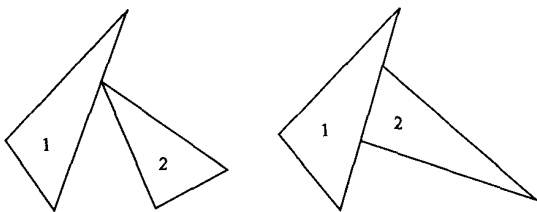


图 2 一个角区  
Fig. 2 Two angles

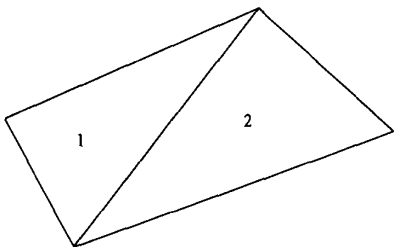


图 3 无角区  
Fig. 3 No angles

可以证明两个三角形相切,至多形成两个角区.由定义可知,两个相切三角形的两边是否构成角区,与将要放入该角区的三角形的大小和形状无关.这些角区,好像人们加工材料过程中裁下的“边角余料”.如能够优先考虑利用这些“边角余

料”,便能充分提高整个材料的利用率.因此,能否充分高效地利用这些角区,直接决定着算法的最终效果.

一个平面图形的自由度,由平移和旋转决定.如果一个三角形以其重心为始点,可以沿该三角形任一边所在的直线做两个相反方向的平移,则称该三角形的位置是悬空的位置.如果一个三角形只能沿一条直线做两个相反的方向平移或绕其某一个顶点做相反方向的旋转,则称该三角形的位置是可推动的或可摆动的位置.依据人们加工材料的经验,可推动或可摆动的位置,以及悬空的位置,都是不利于提高材料利用率的位置.

**定义 2** 占角动作:如果一个三角形的一边和一个角区的始边或终边相贴(即重合部分的长度大于零),该三角形的另一边和角区的终边或始边相切,把该三角形按该位置放入该角区的过程称为一个占角动作.

**定义 3** 占角动作的贴边度:如果三角形的一边(设边长为  $a_1$ )与角区的一边(设长度为  $b_1$ )相贴,设重合部分的长度为  $c_1$ ,则该占角动作的贴边度为  $q_1=c_1/\max(a_1,b_1)$ .

特别地,如果三角形还有另一边(设边长为  $a_2$ )和角区的另一边(设长度为  $b_2$ )相贴,设这两边重合部分的长度为  $c_2$ ,则该占角动作的贴边度为  $q=c_1/\max(a_1,b_1)+c_2/\max(a_2,b_2)$ .

2 拟人策略

一般来说,在到达终止格局前的第  $k$  格局,如果盲目地做一个合理的占角动作,可能会形成新的角区,并把整个可用空间分成一些“碎块”,不利于整体材料的充分利用.同时,在以后的计算中,增加了搜索空间,使得计算速度降低.依据人们处理实际问题的经验,有以下 3 种拟人策略.其主要依据原则是:充分利用“边角余料”,尽量减小整体材料的破坏.

**贴边优先度策略** 对于两个合理的占角动作  $a_1,a_2$ ,设两者的贴边度分别为  $q_1,q_2$ ,如果  $q_1>q_2$ ,则称动作  $a_1$  比动作  $a_2$  具有较高的优先度;如果  $q_1=q_2$ ,则称动作  $a_1$  和动作  $a_2$  具有相同的优先度.

**合角优先度策略** 对于两个合理的占角动作  $a_1,a_2$ ,设两者的贴边度分别为  $p_1,p_2$ ,如果  $p_1<p_2$ ,则称动作  $a_1$  比动作  $a_2$  具有较高的优先度;如果  $p_1=p_2$ ,则称动作  $a_1$  和动作  $a_2$  具有相同的优

先度.

采取这两种拟人策略,是为了把三角形放入和其大小形状特征尽量“吻合”的地方.每到一个新的格局,按照贴边和合角优先度策略,可以把优先度不同的合理占角动作排序.选择优先度最高的合理占角动作来做,有利于充分利用空间,减少空间的浪费.

**原点策略** 对于两个合理的占角动作  $a_1, a_2$ , 设两者所对应三角形的重心坐标分别为  $\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle$ , 如果  $x_1^2 + y_1^2 < x_2^2 + y_2^2$ , 则动作  $a_1$  比动作  $a_2$  优先.

如果  $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$ , 则先遇到的合理占角动作优先.

采用原点策略,是为了使得矩形容器内三角形的重心都尽可能的靠近原点.这样,有利于把三角形更紧凑地放入矩形容器内.

在合理的占角动作排序过程中,可能出现两个或更多的合理的占角动作具有相同的优先度.

3 贴边算法

基于以上 3 种拟人策略,求解三角形 Packing 问题,有下面的贴边算法:

**Step 1:** 给定初始格局  $\langle P_0, Q_0, R_0 \rangle$ , 其中  $P_0$  只包含组成矩形容器的四个三角形,  $Q_0$  是所有待放入矩形容器内的三角形的集合,  $R_0$  是组成矩形容器的 4 个三角形构成的四个角区的集合.格局中的角区和合理的占角动作分别按先后顺序进行排列.

若格局中没有合理的占角动作可做,报告该算法求不出问题的解.算法结束.

若贴边优先度最高的合理的占角动作只有一个,则做该动作;转 Step 2.

若贴边优先度最高的合理的占角动作多于一个,在最高贴边优先度的合理的占角动作中选择合角优先度最高的占角动作来做;转 Step 3.

若合角优先度最高的合理的占角动作多于一个,按原点策略选择优先度最高的动作来做.转 Step 2.

**Step 2:** 在  $P_0$  中加入做该动作的三角形的 3 个顶点的坐标,从  $Q_0$  中去掉做该动作的三角形的 3 个边长.将  $P_0$  换成  $P_1$ , 将  $Q_0$  换成  $Q_1$ , 将  $R_0$  换成由  $P_1$  中的三角形构成的角区的集合  $R_1$ . 进入新的格局  $\langle P_1, Q_1, R_1 \rangle$ .

**Step 3:** 一般地,假定在格局  $\langle P_k, Q_k, R_k \rangle$  下,  $P_k$  中已有  $k+4$  个三角形,  $k \geq 1$ ,

若  $Q_k = \emptyset$ , 则报告得到了问题的一个解.算法结束.

若  $Q_k \neq \emptyset$ , 且格局中没有合理的占角动作可做,报告该算法求不出问题的解.算法结束.

若  $Q_k \neq \emptyset$ , 且格局中存在合理的占角动作可做,若贴边优先度最高的合理的占角动作只有一个,则做该动作;转 Step 4.

若贴边优先度最高的合理的占角动作多于一个,在最高贴边优先度的合理的占角动作中选择合角优先度最高的占角动作来做;转 Step 4.

若合角优先度最高的合理的占角动作多于一个,按原点策略选择优先度最高的动作来做.转 Step 4.

**Step 4:** 在  $P_k$  中加入做该动作的三角形的 3 个顶点的坐标,从  $Q_k$  中去掉做该动作的三角形的 3 个边长.将  $P_k$  换成  $P_{k+1}$ , 将  $Q_k$  换成  $Q_{k+1}$ , 将  $R_k$  换成由  $P_{k+1}$  中的三角形构成角区的集合  $R_{k+1}$ . 进入新格局  $\langle P_{k+1}, Q_{k+1}, R_{k+1} \rangle$ . 转 Step 3.

4 实验结果分析

笔者在内存 32M、主频为 Pentium 166MHz 的 PC 机进行了程序实现,对大量的实例进行了实验,并与文献[9]中的实例进行了比较.结果(图 4~图 6)表明,本算法具有可观的效率和更高的完整性.由计算结果可以看出,本算法求解三角形 Packing 问题的利用率一般在 81% 以上.与文献[9]中的算法具有相同的效率,但具有更高的完整性.

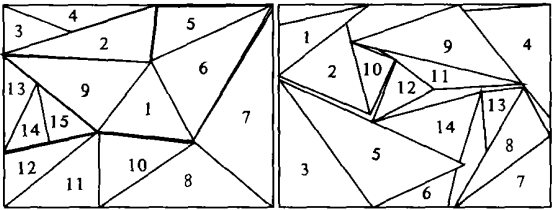


图 4 实例 1

Fig. 4 The first Instance

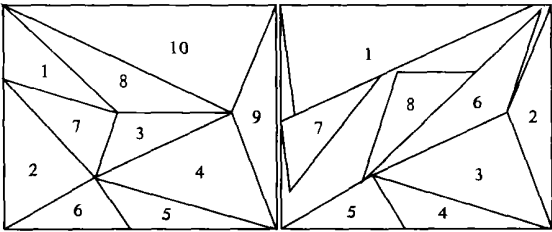


图 5 实例 2

Fig. 5 The second Instance

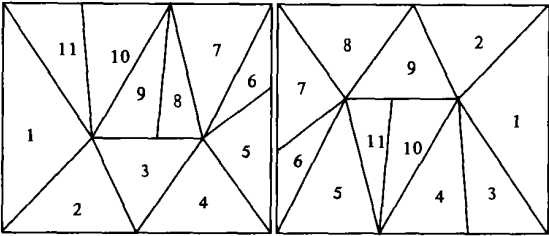


图 6  实例 3  
Fig.6  The third instance

图 4~图 6 是从众多实例中随机挑选的几个实例,每个实例图中的左半部分,表示已知的一个手工解,右半部分表示根据本算法得到的解.图中三角形上的标号,表明三角形放入矩形容器时的顺序.

参考文献:

[ 1 ]  黄文奇,许如初.支持求解圆形Packing 问题的两个

拟人策略[J].中国科学(E 辑),1999,29( 4 ):347~353.  
[ 2 ]  黄文奇,朱  虹,许向阳,等.求解方格Packing 问题的启发式算法[J].计算机学报,1993,16( 11 ):829~836.  
[ 3 ]  DOWSLAND K A,DOWSLAND W B. Packing problems [J]. European Journal of Operational Research, 1992, 56 ( 1 ): 2~14.  
[ 4 ]  LI K Q, CHENG K H. Heuristic algorithms for on -line packing in three dimensions [J]. Journal of Algorithms , 1992, 13( 4 ): 589~605.  
[ 5 ]  黄文奇,王瑞民.求解单位等边三角形Packing 问题的占角算法[J].鄂州大学学报,2000,7( 2 ):1~3.  
[ 6 ]  王瑞民,陈  卓.求解三角形Packing 问题的占角算法[J].郑州大学学报(工学版),2004,25( 4 ):52~55.

A Conjoint Algorithm for Solving the Triangles Packing Problem

WANG Rui -min<sup>1</sup>, LIU Lei<sup>2</sup>

( 1.School of Information Engineering , Zhengzhou University , Zhengzhou 450052, China ; 2.Department of Information Security , Henan Public Security College , Zhengzhou 450002, China)

**Abstract :** Solving NP hard problems is always the bottleneck task for computer science and techniques . Investigations from the 1970's to now show that for NP hard problems , there is still not an algorithm that is both complete and rigorous and not too slow . The triangles packing problem is one of the NP hard problems . Personification approach draws on analogy between the resolving problem and some social phenomena . According to personification approach , some strategies for tackling the triangles packing problem are presented and two highly efficient approximate algorithms have been developed based on these strategies . The result of our tests shows that the algorithm to solve the triangles packing problem by using personification approach is of high efficiency .  
**Key words :** triangles packing problem ; conjoint ; action value ; quasi - person strategy