2005年 12月 第26卷 第4期
郑州大学学报(工学版) Journal of Zhengzhou University (Engineering Science)
Dec. 2005 Vol.26 No.4

文章编号:1671-6833(2005)04-0107-03

复杂特型函数高阶导数与原函数统一性的推广

成立社[1], 王社宽[2]

(1.郑州大学数学系,河南 郑州 450000;2.陕西科技大学理学院,陕西 咸阳 712081)

摘 要:把文献[1]中所研究的高阶导数与原函数的统一性公式,利用数学归纳法推广到了结构更为复杂的特型函数中,获得了比文献[1]应用更为广泛的结果.研究结果表明:高阶导数与原函数这对互逆运算在一些复杂特型函数中可实现统一;利用该结果仅需通过分析该类复杂特型函数的导数与其自身的结构特征,不需做分析运算,即可快速的获得用同一个公式表示该类复杂特型函数的高阶导数与原函数的结果.

关键词:高阶导数;原函数;统一性;推广

中图分类号:O 172.1;O 72.2 **文献标识码**:A

0 引言

复杂函数的高阶导数的求法一般是采用逐次求导法,需要特别繁琐的运算,甚至还要利用一系列的技巧,再经过归纳才能得到求其高阶导数的一般性公式.对于函数原函数的求法,只能通过积分运算求得,而积分运算求原函数一般要利用较高的技巧和较多的积分公式.我们知道原函数与导数是一对互逆的概念,一般情况下不可能实现统一的运算,更何况高阶导数与原函数.文献[1]对一类较为复杂的函数的导数极其自身结构特征的研究,表明了高阶导数与原函数在一定的条件下可以实现统一.作者把文献[1]中研究的高阶导数与原函数统一性的公式进行了再推广,获得了比文献[1]应用更广泛的结果,该研究结果适应的函数其结构更为复杂.为叙述方便,本文中出现的符号 $y^{(-1)}$ 表示函数 y 的一个原函数,$y^{(n)}$ 表示函数 y 的 n 阶导数,$y^{(0)}$ 表示函数 y 自身.

1 高阶导数与原函数统一性公式的推广结果

定理 设 $y=e^{kx}g(x)$,其中 $g(x)$ 可导,若 $y'=ke^{kx}[g(x+\frac{1}{k})+a_0(x+\frac{1}{k})^4+a_1(x+\frac{1}{k})^3+a_2(x+\frac{1}{k})^2+a_3(x+\frac{1}{k})+a_4]\ (k\neq 0)$,则有

$$y^{(n)}=k^ne^{kx}[g(x+\frac{n}{k})+na_0(x+\frac{n}{k})^4+na_1(x+\frac{n}{k})^3+(na_2+\frac{3n(1-n)}{k^2}a_0)(x+\frac{n}{k})^2+(na_3+\frac{4n(n-1)}{k^3}a_0+\frac{3n(1-n)}{2k^2}a_1)(x+\frac{n}{k})+(na_4+\frac{n(n-1)(2n-7)}{2k^4}a_0+\frac{n(n-1)}{k^3}a_1+\frac{n(1-n)}{2k^2}a_2]$$

其中,$n=0,-1,1,2,3,\cdots,n\cdots$.

证明 (1)当 $n=0$ 时,$y^{(0)}$ 显然就是函数 y,结论成立.

(2)当 $n=-1$ 时,只须证明公式右端为 y 的原函数即可.令 $x-\frac{1}{k}=u$,因为

$$\{k^{-1}e^{kx}[g(x-\frac{1}{k})-a_0(x-\frac{1}{k})^4-a_1(x-\frac{1}{k})^3-(a_2+\frac{6}{k^2}a_0)(x-\frac{1}{k})^2-(a_3-\frac{8}{k^3}a_0+\frac{3}{k^2}a_1)(x-\frac{1}{k})-a_4-\frac{9}{k^4}a_0+\frac{2}{k^3}a_1-\frac{a_2}{k^2}]\}'=$$

$$k^{-1}\{e[e^{ku}g(u)]'_u\cdot u'_x-ke^{kx}[a_0(x-\frac{1}{k})^4+a_1(x-\frac{1}{k})^3+(a_2+\frac{6a_0}{k^2})(x-\frac{1}{k})^2+(a_3-\frac{8a_0}{k^3}+\frac{3a_1}{k^2})(x-\frac{1}{k})+a_4+\frac{9a_0}{k^4}-\frac{2a_1}{k^3}+\frac{a_2}{k^2}]-e^{kx}[4a_0(x-\frac{1}{k})^3+3a_1(x-\frac{1}{k})^2+(2a_2+\frac{12a_0}{k^2})(x-\frac{1}{k})+a_3-\frac{8a_0}{k^3}+\frac{3a_1}{k^2}]\}.$$

收稿日期:2005-07-06;**修订日期**:2005-09-15
基金项目:河南省教育厅自然科学研究项目(2004110006)
作者简介:成立社(1963-),男,陕西武功人,郑州大学副教授,主要从事函数论方面的研究.

把 $[e^{ku}g(u)]'_u = ke^{ku}[g(u+\frac{1}{k})+a_0(u+\frac{1}{k})^4+a_1(u+\frac{1}{k})^3+a_2(u+\frac{1}{k})^2+a_3(u+\frac{1}{k})+a_4] = ke^{kx-1}[g(x)+a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4]$ 代入上式,经简单整理后即可得到上面式子等于 $e^{kx}g(x)$. 所以有

$$y^{(-1)} = k^{-1}e^{kx}[g(x-\frac{1}{k})-a_0(x-\frac{1}{k})^4-a_1(x-\frac{1}{k})^3-(a_2+\frac{6a_0}{k^2})(x-\frac{1}{k})^2-(a_3-\frac{8a_0}{k^3}+\frac{3a_1}{k^2})(x-\frac{1}{k})-a_4-\frac{9a_0}{k^4}+\frac{2a_1}{k^3}-\frac{a_2}{k^2}]$$ 成立.

(3) $n\neq-1$ 时,利用数学归纳法来证. 由条件易知,当 $n=1$ 时,结论显然成立. 假设当 $n=m-1$ 时,有

$$y^{(m-1)} = k^{m-1}e^{kx}[g(x+\frac{m-1}{k})+a_0(m-1)(x+\frac{m-1}{k})^4+a_1(m-1)(x+\frac{m-1}{k})^3+(a_2(m-1)+\frac{3(m-1)(2-m)}{k^2}a_0)(x+\frac{m-1}{k})^2+(a_3(m-1)+\frac{4(m-1)(m-2)}{k^3}a_0)(\frac{3(m-1)(2-m)}{2k^2}a_1)(x+\frac{m-1}{k})+a_4(m-1)+\frac{(m-1)(m-2)(2m-9)}{2k^4}a_0(\frac{(m-1)(m-2)}{k^3}a_1+\frac{(m-1)(2-m)}{2k^2}a_2]\,.$$

为方便起见,令 $x+\frac{m-1}{k}=u$,即 $x=u-\frac{m}{k}+\frac{1}{k}$. 因为

$$y^{(m)} = [y^{(m-1)}]' = k^{m-1}\{e^{-m+1}[e^{ku}\cdot g(u)]'_u\cdot u'_x + k(m-1)a_0(x+\frac{m-1}{k})^4e^{kx}+4e^{kx}(m-1)a_0(x+\frac{m-1}{k})^3+ka_1(m-1)(x+\frac{m-1}{k})^3e^{kx}+3(m-1)a_1e^{kx}(x+\frac{m-1}{k})^2+[k(m-1)a_2+\frac{3(m-1)}{k^2}\cdot(2-m)a_0k](x+\frac{m-1}{k})^2e^{kx}+2e^{kx}[(m-1)\cdot a_2+\frac{3(m-1)(2-m)}{k^2}a_0](x+\frac{m-1}{k})+[k(m-1)a_3+\frac{4(m-1)(m-2)}{k^3}a_0k+\frac{3(m-1)(3-m)}{2k^2}a_1k](x+\frac{m-1}{k})e^{kx}+e^{kx}[(m-1)a_3+\frac{4(m-1)(m-2)}{k^3}a_0+\frac{3(m-1)(2-m)}{2k^2}a_1)+ke^{kx}(m-1)a_4+\frac{(m-1)(m-2)(2m-9)}{2k^4}a_0+\frac{(m-1)(m-2)}{k^3}a_1+\frac{(m-1)(2-m)}{2k^2}a_2]\}$$ 类似于上面(2)的证明,只需把

$$[e^{kx}g(u)]'_u = ke^{ku}[g(u+\frac{1}{k})+a_0(u+\frac{1}{k})^4+a_1(u+\frac{1}{k})^3+a_2(u+\frac{1}{k})^2+a_3(u+\frac{1}{k})+a_4] = ke^{kx+m-1}[g(x+\frac{m}{k})+a_0(x+\frac{m}{k})^4+a_1(x+\frac{m}{k})^3+a_2(x+\frac{m}{k})^2+a_3(x+\frac{m}{k})+a_4]\,.$$

代入上式,经过简单繁杂的代数运算整理后,即可得到上式

$$y^{(m)} = k^me^{kx}[g(x+\frac{m}{k})+ma_0(x+\frac{m}{k})^4+ma_1(x+\frac{m}{k})^3+(ma_2+\frac{3m(1-m)}{k^2}a_0)(x+\frac{m}{k})^2+(ma_3+\frac{4m(m-1)}{k^3}a_0+\frac{3m(1-m)}{2k^2}a_1)(x+\frac{m}{k})+ma_4+\frac{m(m-1)(2m-7)}{2k^4}a_0+\frac{m(m-1)}{k^3}a_1+\frac{m(1-m)}{2k^2}+a_2]\,.$$

所以,当 $n=m$ 时,结论成立. 综上(1)、(2)、(3)证明可知结论成立.

2 算例

例 设 $y=e^{2x}(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$,试求函数 y 的 n 阶导数 $y^{(n)}$ 及函数 $y^{(-1)}$.

解 令 $g(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$,则有

$$y=e^{2x}g(x)\,.$$

因为

$$y' = [e^{2x}g(x)]' = 2e^{2x}(x^5+\frac{7}{2}x^4+3x^3+\frac{5}{2}x^2+2x+\frac{3}{2}) = 2e^{2x}[g(x+\frac{1}{2})-\frac{5}{2}(x+\frac{1}{2})^3+(x+\frac{1}{2})^2-\frac{21}{16}(x+\frac{1}{2})+\frac{1}{4}]\,,$$

其中,$k=2$;$a_0=0$;$a_1=\frac{-5}{2}$;$a_2=1$;$a_3=-\frac{21}{16}$;$a_4=\frac{1}{4}$.

所以,由定理知

$$y^{(n)} = 2^ne^{2x}[(x+\frac{n}{2})^5+(x+\frac{n}{2})^4+(1-\frac{5n}{2})(x+\frac{n}{2})^3+(1+n)(x+\frac{n}{2})^2+(1+\frac{3n(5n-12)}{16})\cdot(x+\frac{n}{2})+1+\frac{n(7-3n)}{16})\quad(n=-1,0,1,2,\cdots,n,$$

…)

3　结束语

笔者对复杂特型$y=e^{kx}g(x)$函数及其导数的结构特征进行了研究,研究结果表明高阶导数与原函数及函数自身三者在该类较为复杂函数中可实现统一,得出了他们之间的统一表达式.另外在上述推广结论中,若令$a_0=0$,该推广定理的结果即为文献[1]中的结果;若令$a_0=a_1=a_2=a_3=0$;且$n=-1$时,该推广定理即为文献[2]中定理8的结果.

参考文献:

[1] 成立社.高阶导数与原函数统一性的研究[J].郑州工业大学学报,2001,22(1):68~70.

[2] 纪乐刚.数学分析[M].上海:华东师范大学出版社,1993.

[3] 朱俊恭.几个函数的负导数[J].贵州教育学院学报,2005,16(2):7~8.

Generalization of the Unity of the Complicated Special Function's Higher-order Derivation and Primary Function

CHENG Li-she, WANG She-kuan

(1.Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450000, China; 2.Department of Mathematics & Physics, Shanxi University of Science & Technology, Xianyang 712081, China)

Abstract: Utilization of mathematical induction extends the unity of the higher-order derivation and primary function formula in document [1] to the special functions whose structural features are more complicated. The results we obtain are more wid-ranging than the ones in document [1]. The results show that the higher-order derivative and its primary function, the two-way transformer counterparts, can be practically unified in a kind of complicated special functions, and that only through analyzing the structural features of this kind of complicated special functions derivative and those of this kind functions themselves can we obtain quickly the results of the unity of this kind of complicated functions higher-order derivative and their primary functions, without any analysis and operation.

Key words: higher-order derivative; primary function; unity; generalization