文章编号:1671-6833(2006)01-0075-04

MIMO 系统解耦规范型实现及其特征结构配置

张 刘, 王子华

(哈尔滨工业大学控制理论制导技术研究中心 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘 要:为进一步完善 MIMO 系统输入-输出动态解耦控制问题,本文综合运用了状态反馈、输入变换及坐标变换方法,得到了一种简洁完备的解耦规范型,并给出了配置各子系统特征结构的反馈控制律及相应的各反馈矩阵的显示表达式,数值算例表明了本方法的简单有效性.

关键词:解耦控制;特征结构配置;线性系统

中图分类号:TP 273;TP 312 文献标识码:A

0 引言

解耦控制问题是多输入—多输出线性定常系统控制综合理论中的重要问题,具有重要的工程意义[1,2],如在无人机的控制上[3,4]等.特征结构配是通过设计合适的控制规律以使系统具有希望的特征值和重数,同时确定相应的闭环特征向量和广义特征向量,从而较极点配置更能把握系统的特性[5~10].

对 MIMO 解耦控制问题,通常通过状态反馈和输入变换方法实现系统的积分型解耦[9~13],然后进一步进行极点配置,而极点配置的有效方法是通过状态反馈来实现,这就面临着极点配置要破坏解耦性的问题.如何在保证实现解耦控制的同时又能进行任意极点配置就是一个非常重要而又必须解决的问题[2,12].对此,文献[12,13]通过把积分型解耦系统化为一种解耦规范型,再进行极点配置.但如何才能化成这种规范型,文献[12]仅给出了在系统完全能观能控的条件下,利用两个最小实现间变换关系给出一个变换表达式,系统不完能观时.鉴于由积分型解耦向解耦规范型变换的困难,文献[8]提供了一种仅能实现解耦极点配置的频域方法,不能对系统的结构特征进行配置,从而不能准确把握系统的特性.笔者对上述问题进行了研究,对任意满足动态可解耦条件的系统,首先给出了一种显式的具有明显物理意义的输入输出解耦规范型完全实现方法,并在此基础上给出了实现各解耦模块的特征结构配置反馈控制器.

1 动态可解耦充要条件及解耦规范标准型的实现[12]

为得到系统解耦规范标准型,我们首先给出以下几个相关引理及定理.

引理 1[9] 对具有相同输入、输出个数的多输入—多输出线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \tag{1}$$

其中:$A \in R^{n \times n}$,$B \in R^{n \times m}$,$C \in R^{m \times n}$,且$[A\ \ B]$能控.采用控制规律 $u = K_x + L_v$,即存在输入变换和状态反馈矩阵对 $\{L, K\}$ 进行解耦的充要条件是 如下 $m \times m$ 维可解耦性判别矩阵

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_m \end{bmatrix} \tag{2}$$

为非奇异.且当选取 $\{L, K\}$ 为 $L = E^{-1}$,$K = E^{-1}F$ 时系统的解耦控制系统的传递函数矩阵为

$$G_{KL}(S) = \begin{bmatrix} \frac{1}{S^{d_1+1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{S^{d_m+1}} \end{bmatrix} \tag{3}$$

收稿日期:2005-11-10;修订日期:2006-01-09

资助信息:哈工大实验技术研究资助项目(01104538)

作者简介:张 刘(1978-),男,安徽蚌埠人,哈尔滨工业大学博士研究生,主要从事非线性系统鲁棒控制、解耦控制系统实现等方面的研究工作.

万方数据

其中：$F = \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1+1} \\ \vdots \\ c_m A^{d_m+1} \end{bmatrix}$，$E_i$ 与 d_i，$(i = 1,2,\cdots,m)$是解耦控制中两个基本特征量，其定义及上述引理的有关证明见文献[2,9].

定理 1　对 MIMO 线性系统(1)，如果其满足动态解耦条件，则

$$\{c_i A^j, i = 1,2.\cdots,m, j = 0,1,\cdots,d_i\} \qquad (4)$$

行线性无关.

证明：不失一般性，设 $d_i < d_j$，$(\forall < j)$，定义矩阵 $Q = [c_1^{\mathrm{T}}, \cdots, (c_1 A^{d_1})^{\mathrm{T}}, \cdots, c_m^{\mathrm{T}}, \cdots, (c_m A^{d_m})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$

和矩阵

$P = [b_1,\cdots,b_m, Ab_1,\cdots,Ab_m \cdots A^{d_m} b_1,\cdots,A^{d_m} b_m]$，计算矩阵 $N = QP$，结合系统动态解耦的充要条件，可得具有分块结构的矩阵 N 行线性无关，从而可证得矩阵 Q 行满秩.

定理 2　对可实现动态解耦的系统，如果 $d = d_1 + d_2 + \cdots + d_m$，则至少存在满足条件：$\eta B = O$ 的 $(n - d) \times n$ 维矩阵 η 使得具有矩阵 $T \begin{bmatrix} Q \\ \eta \end{bmatrix}$ 满秩，即 $\mathrm{rank}(T) = n$.

证明：由能动态解耦条件知

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1} \\ \vdots \\ c_m A^{d_m} \end{bmatrix} [b_1 \cdots b_m] \qquad (5)$$

非奇异，令 $\Phi = \mathrm{span}\{b_1,\cdots b_m\}$，则一定 $\exists (n - m)$个 n 维行向量 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-m}$满足：

$$\Phi^{\perp} = \mathrm{span}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-m}\},$$

令 $\Omega = \mathrm{span}\{Q\} = \mathrm{span}\{c_i A^k, 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant k \leqslant d_i\}$

则必有：$\Phi \cap {}^{\perp} = 0$.

否则，一定存在一形如 $\gamma = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$ 的非零向量 $\gamma \in \Phi$(其中 c_i 不全为零)，也同时属于 $G^{\perp}$，且

$\begin{bmatrix} c_i A^{d_1} \\ \vdots \\ c_m A^{d_m} \end{bmatrix} \gamma = E \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = 0$，又因 E 非奇异，矛盾.

从而 $\Phi^{\perp} \cap \Omega = 0$，得证.

在以上引理及定理的基础上，我们给出通过坐标变换和状态反馈实现解耦规范型的定理 3，该定理给出使原系统化为解耦规范型的输入变换阵 G 和状态反馈矩阵 T 的显式表达式，从而为进一步设计反馈控制律，实现对每一个解耦后的 SISO 系统进行特征结构配置奠定基础.

万方数据

定理 3　定义如下矩阵

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1} B \\ \vdots \\ c_m A^{d_m} B \end{bmatrix},$$

$$G = E^{-1} = [g_1 \cdots g_m],$$

$$T = \begin{bmatrix} Q \\ \cdots \\ \eta \end{bmatrix}, P = T^{-1} = [\rho_1 \cdots \rho_m],$$

$$F = \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1+1} \\ \vdots \\ c_m A^{d_m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix}$$

设系统(1)满足动态解耦条件，任意 $(n - d) \times n$ 维矩阵 η 使矩阵 $T = \begin{bmatrix} Q \\ \cdots \\ \eta \end{bmatrix}$ 满秩，则对原系统同时作用状态反馈控制律 $u = -GFx + Gv$ 和线性非奇异变换 $z = Tx$，可将系统化为文献[7,8]中所给的解耦规范型，特别地按定理 2 中选取满足条件 $\eta B = 0$ 的 $(n - d) \times n$ 维矩阵 η 构成矩阵 $T = \begin{bmatrix} Q \\ \cdots \\ \eta \end{bmatrix}$，可将原系统化为如下的本文将在使用的新的解耦规范型：

$$\begin{cases} \dot{z} = \hat{A} z + \hat{B} v \\ y = \hat{C} z \end{cases} \qquad (6)$$

$$\hat{A}_i = \left[\begin{array}{cccc:c} \hat{A}_i & & & & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & & \hat{A}_m & 0 \\ \hdashline \hat{A}_{\bar{c}1} & & \cdots & \hat{A}_{\bar{c}m} & \hat{A}_{m+1} \end{array}\right], \hat{B} = \left[\begin{array}{ccc} \hat{b}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{b}_m \\ \hdashline 0 & \cdots & 0 \end{array}\right],$$

$$\hat{C} = \left[\begin{array}{ccc:c} \hat{c}_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \hat{c}_m & 0 \end{array}\right]$$

其子矩阵具有如下形式：

$$\underset{(d_i+1)\times(d_i+1)}{\hat{A}_i} = \left[\begin{array}{c:c} 0 & \\ \vdots & I \\ \hdashline 0 & \cdots \quad 0 \end{array}\right], \underset{(d_i+1)\times 1}{\hat{b}_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\underset{1\times(d_i+1)}{\hat{c}_i} = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0].$$

证明：因为有 $E_i G = [0 \quad \cdots \quad \underset{\text{第}i\text{列}}{1} \quad \cdots \quad 0]$，

$E_i GF = [0 \quad \cdots \quad \underset{\text{第}i\text{列}}{F_i} \quad \cdots \quad 0]$，

从而有

$$\dot{z} = T\dot{x} = TAPz + TB(-GFPz + Gv).$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{A}^{d_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_m \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_m\boldsymbol{A}^{d_m} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \boldsymbol{E}_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \boldsymbol{E}_m \\ 0 \end{bmatrix} \{-\boldsymbol{G}\boldsymbol{F}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{v}\}$$

$$= \hat{\boldsymbol{A}}z + \hat{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{v}.$$

又据 z 的选取，显见 $y = \hat{C}z$，从而得证.

2　解耦标准型下的特征结构配置及解耦控制综合算法

上节已经得到解耦规范型，且该解耦规范型具有明确的物理意义(每一解耦后的SISO系统变量均为系统原输出及其各阶导数)，故可对解耦后的单输入单输出控制系统进行特征结构配置，相应的状态反馈增益矩阵取如下形式 $v = \hat{\boldsymbol{K}}z + \boldsymbol{r}$，

其中：
$$\hat{\boldsymbol{K}} = \left[\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{k}_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \boldsymbol{k}_m & 0 \end{array}\right] \tag{7}$$

$\boldsymbol{k}_i = [\boldsymbol{k}_{i0} \quad \cdots \quad \boldsymbol{k}_{id_i}] = \boldsymbol{W}_i\boldsymbol{V}_i^{-1}, i = 1,2,\cdots,m$，

$\boldsymbol{W}_i$，$\boldsymbol{V}_i$ 定义及实现算法请参见文献[13].

对于系统(1)，使其实现输入输出解耦后同时配置各单输入-单输出系统的特征结构的反馈控制律 $\boldsymbol{K}$ 和输入变换阵 $\boldsymbol{L}$ 为 $\boldsymbol{K} = -\boldsymbol{G}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{G}$

相应的变换阵为 $\boldsymbol{T}\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q} \\ \cdots \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix}$. 解耦控制综合算法步骤如下：

步骤1：计算受控系统(1)的结构特征量 $\{d_i, i = 1,2,\cdots,m\}$，$\{\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{c}_i\boldsymbol{A}^{d_i}\boldsymbol{B}, i = 1,2,\cdots,m\}$；

步骤2：判断可解耦条件，若能解耦，进入下一步；

步骤3：计算相关矩阵 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{E}^{-1}$，$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{P}$，利用定理3中给出的方法计算解耦标准型；

步骤4：对解耦控制后的SISO系统进行特征结构配置，给出应的状态反馈增益矩阵 $\hat{\boldsymbol{K}}$；

步骤5：对于系统(1)，使其实现输入输出解耦后同时配置各单输入-单输出系统的特征结构的反馈控制律 $\boldsymbol{K}$ 和输入变换阵 $\boldsymbol{L}$ 及相应的变换阵为 $\boldsymbol{T}$.

万方数据

3　数值算例

考虑如下两输入两输出系统：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u},$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1) 计算受控系统的结构特征指数 $\{d_1, d_2\}$ 和结构特征向量 $\{\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2\}$

$\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{B} = [0 \quad 0]$，$\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = [1 \quad 0]$，$\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{B} = [0 \quad 1]$.

从而可得 $d_i = 1$，$d_2 = 0$. $\boldsymbol{E}_1 = [1 \quad 0]$，$\boldsymbol{E}_2 = [0 \quad 1]$.

(2) 判断可动态解耦条件，由

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{G} = \boldsymbol{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

得系统可满足动态解耦条件.

(3) 化系统为解耦标准型，计算

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{A}^2 \\ \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{A} \end{bmatrix}.$$

应用定理3，可得系统的解耦规范

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \cdots\cdots \\ \dot{z}_3 \\ \cdots\cdots \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_3 \\ \cdots \\ z_4 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_3 \\ \cdots \\ z_4 \end{bmatrix}.$$

(4) 对解耦后的单输入单输出系统进行期望的特征结构配置，注意到第二子系统实际上为一维积分型，我们给出其期望极点为 -3 时的反馈控制律 $k_2 = [3]$，对第一子系统，利用文献[10]中的特征结构配置方法给出相应的反馈控制律 $k_1 = [\boldsymbol{k}_{10} \quad \boldsymbol{k}_{11}]$.

对指定的期望极点 $S_1 = -1$，$S_2 = -2$，可得

$$N(S)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ S & 1\end{bmatrix},D(S)=[-S^2 \quad -S]$$

这种情况下,W_1,V_1 的一般表达式为

$$V_1=[N(-1)f_{11}^1 \quad N(-2)f_{21}^1],$$

$$W_1=[D(-1)f_{11}^1 \quad D(-2)f_{21}^1].$$

特别的选取 $f_{11}^1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$,$f_{21}^1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$,可得 $V_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$,$W_1=[-1 \quad -4]$,$k_1=[-5 \quad -4]$,从而可得

$$\hat{K}=\left[\begin{array}{c:c:c}k_1 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & k_2 & 0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc:c:c}-5 & -4 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 3 & 0\end{array}\right].$$

(5) 定出相对于原系统 $\{A,B,C\}$ 的输入变换阵 L 和状态反馈矩阵 K

$$L=G,K=-GF+G\hat{K}T.$$

相应的状态变换矩阵为

$$T=\begin{bmatrix}c_1\\ c_1A\\ c_2\\ \eta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

4 结论

笔者对解耦控制进行了研究,在文献[12]中的方法的基础上,给出了一种新的解耦规范型及其具体的实现方法,然后对解耦后系统给出了实现特征结构配置的反馈控制律的解析式,从而给出了实现输入输出解耦同时配置各单输入单输出系统的特征结构的反馈控制律及相应的状态变换阵的表达式,数值例子表明了本方法的简单有效性.

参考文献:

[1] FALLB P L, WOLOVICH W A. Decoupling in the design of multi - variable control systems[J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1967, AC-12 (4) :651 ~ 659.

[2] WONHAM W M, MORSE A S. Decoupling and pole-assignment in linear multi-variable systems-a geometric approach[J]. SIAMJ. Control, 1970, 8 (1) :1 ~ 18.

[3] 宗明山,蒋支运,吴文海. 无人直升机飞行控制系统设计[J]. 飞机设计, 2003, (3) :67 ~ 72.

[4] 刘武发,蒋 蓁,龚振邦. 无人直升机飞行控制系统设计[J]. 郑州工业大学学报(工学版), 2003, 24 (3) 78 ~ 82.

[5] DUAN G-R. Eigenstructure assignment by decentralized output feedback-A complete parametric approach[J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1994, 39 (12) :2490 ~ 2494.

[6] 段广仁,吴广玉,黄文虎. 线性系统的状态反馈特征结构配置[J]. 自动化学报, 1990, 16(6) :, 566 ~ 568.

[7] 段广仁. 时变线性系统的特征结构配置问题[J]. 中国科学(A 辑), 1990, (7) :769 ~ 784.

[8] 田国会,李晓磊,杨西侠. 多变量线性系统解耦控制中极点配置问题的一种简便解法[J]. 山东工业大学学报, 2000, 30(4) :301 ~ 305.

[9] 吴 麒. 自动控制原理(下册)[M]. 北京 :清华大学出版社, 1990. 91 ~ 105.

[10] 胡寿松. 自动控制原理[M]. (第 3 版)北京 :国防工业出版社, 1994. 442 ~ 551.

[11] 陈启宗. 线性系统理论与设计[M]. 北京 :科学出版社, 1988. 337 ~ 417.

[12] 郑大钟. 线性系统理论[M]. (第 2 版)北京 :清华大学出版社, 2002. 285 ~ 300.

[13] 段广仁. 线性系统理论[M]. (第 2 版)哈尔滨 :哈尔滨工业大学出版社, 2004. 171 ~ 280.

A Simple Aan Efficient Solution to the Decoupling and Eigenstructure Assignment Problem in Linear Multi - Variable Systems

ZHANG Liu, WANG Zi - hua

(Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: To make the dynamic decoupling control problem of MIMO systems more complete, in this paper a simple and neat dynamics decoupling, canonical form of MIMO systems is obtained via variable feedback, input and coordinate transform. Simultaneously, the controller by eigenstructure - assignment of the decoupled subsystems and the corresponding matrices used is presented explicitly. An example shows the effect of the proposed approach.

Key words: decoupling ; eigenstructure - assignment ; linear systems

万方数据