

考虑起始水力梯度时饱和黏土的一维固结

刘忠玉¹, 刘忠广², 马崇武³

(1. 郑州大学土木工程学院, 河南 郑州, 450002; 2. 河南纺织高等专科学校, 河南 郑州, 450007; 3. 东莞理工学院建筑工程系, 广东 东莞, 523808)

摘要:采用考虑起始水力梯度的非 Darcy 渗流方程,修正了 Terzaghi 饱和黏土一维固结理论,并用有限体积法进行了求解.计算结果表明,只要起始水力梯度大于 0,地基的固结速度就慢于 Terzaghi 固结理论值,而且除固结系数外,起始水力梯度,土层厚度以及上覆压力也都对地基的固结有显著影响.另外,还证实,当主固结完成时,地基中存在一定的残余孔隙水压力无法完全消散.

关键词:固结理论;非 Darcy 渗流;起始水力梯度;有限体积法

中图分类号: TU 431

文献标识码: A

0 引言

Terzaghi 于 1923 年建立的饱和黏土一维固结理论体现了固结的基本物理过程,采用的参数可由常规的室内试验提供,而且可以手算求得计算结果,所以至今仍然在岩土工程中广泛应用.因存在固结度理论值与实际值相差过大等诸多不足,因此众多学者分别从非线性应力应变关系^[1-3]、大变形^[4,5]、层状地基^[6]、渗流^[7]、变荷载^[8]等多方面对该理论进行了修正.但现有理论都无法解释文献[9]在用改造过的固结仪进行试验时主固结完成,土样中残余一定的孔隙水压没有完全消散.

在孔隙水渗流方面,虽然 Darcy 定律简洁且被广泛用于多种饱和土中,但其有效性一直受到质疑^[10].因为在低渗黏性土中的许多渗流试验都偏离了 Darcy 定律,此时渗流速度 v 随水力梯度 i 非线性增长,且存在一个起始水力梯度 i_b ^[11].一般认为这是由于低渗黏性土的结合水具有较大的黏滞吸力所致.只有当水力梯度超过起始水力梯度 i_b ,克服了结合水的黏滞阻力后,才能发生渗流.此时的渗流规律可简化为^[12]

$$v = \begin{cases} K(i - i_b), & (i \geq i_b) \\ 0, & (i < i_b) \end{cases} \quad (1)$$

式中: K 是渗透系数.当 $i_b = 0$ 时,上式退化为 Darcy 定律.文献[12]研究了有起始水力梯度时单向和径向的渗流,并得出了压力传播并非瞬时到

达介质末端的结论.而按照 Terzaghi 固结理论,加荷后瞬间整个土层就会产生渗流,从而引起孔隙水压力的消散.笔者用式(1)代替 Darcy 定律描述渗流,采用其它的 Terzaghi 假定条件,拟对该固结理论进行修正,并探讨 i_b 对饱和黏土地基中孔隙水压的消散机制及固结特性的影响.

1 分析模型

分析和 Terzaghi 固结理论一样的土层,即:设饱和黏土地基厚度为 H ,顶面透水,底面不透水且不可压缩(图 1),并假定该地基在自重作用下已经完成固结.现在顶面受到一次骤然施加的无限均布荷载 p_0 作用.这样,土中附加应力图形可取作矩形分布,而且向上的单向渗流是从顶面开始逐步向下推进的.设时刻 t 时,深度 z 处的孔隙水压力为 $u(z, t)$.考虑到式(1)所示的非 Darcy 渗流,渗流不会瞬间在整个土层发生,设渗流前锋到达深度 z_f 处的时刻为 t_f ,到达黏土层底面的时间为 t_d .采用和 Terzaghi 固结方程一样的推导过程,可得非线性渗流一维固结方程为:

$$C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2)$$

$$C_v = K(1 + e)/a\gamma_w \quad (3)$$

式中: C_v 为竖向固结系数; e 为土的初始孔隙比; a 为黏土层的压缩系数; γ_w 为水的重度.相应的定解条件为

收稿日期:2006-04-29;修订日期:2006-05-30

基金项目:河南省教育厅自然科学研究计划项目(2004601068);东莞理工学院教授,博士科研启动基金项目

作者简介:刘忠玉(1968-),男,河南延津人,郑州大学教授,博士,主要从事岩土力学方面的教学和研究工作.

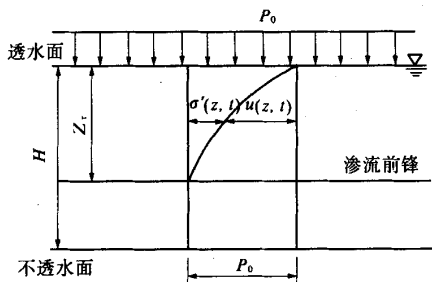


图1 饱和黏土地基的固结过程

Fig 1 Process of consolidation in a saturated clay layer

初始条件: $u(z, 0) = u_0 = p_0$, $(0 \leq z \leq H)$ (4)

$z_f(0) = 0$ (5)

透水边界条件: $u(0, t) = 0$, $(0 < t < \infty)$ (6)

活动边界条件($z = z_f$):

$$\frac{\partial u}{\partial z}(z_f(t_f), t_f) = i_b \gamma_w,$$

$$u(z_f(t_f), t_f) = p_0, \quad (0 < t_f \leq t_d) \quad (7)$$

不透水边界条件: $\frac{\partial u}{\partial z}(H, t) = i_b \gamma_w, (t > t_d)$ (8)

很明显,式(2)、(3)和 Terzaghi 固结方程完全一样,但由于需要求解渗流前锋,所以定解条件比后者多了一个活动边界条件.为便于讨论,将有关各量无量纲化:

$$U = u/p_0, Z = z/H, Z_f = z_f/H, T = C_v t/H^2, T_f = C_v t_f/H^2, T_d = C_v t_d/H^2, I_b = i_b \gamma_w H/p_0 \quad (9)$$

这样,式(2)、(4)~(8)化为 $\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} = \frac{\partial U}{\partial T}$ (10)

初始条件: $U(Z, 0) = 1$, $(0 \leq Z \leq 1)$ (11)

$$Z_f(0) = 0 \quad (12)$$

透水边界条件: $U(0, T) = 0$, $(0 < T < \infty)$ (13)

活动边界条件($Z = Z_f$): $\frac{\partial U}{\partial Z}(Z_f(T_f), T_f) = I_b$,

$$U(Z_f(T_f), T_f) = 1, \quad (0 < T_f \leq T_d) \quad (14)$$

不透水边界条件: $\frac{\partial U}{\partial Z}(1, T) = I_b, (T > T_d)$ (15)

2 方程的数值求解

上述微分方程难以取得解析解,笔者采用有限体积法^[13]求数值解.

2.1 方程的离散

首先以 ΔZ 将黏土层从上向下均分为 N 层,每层为一控制容积,并在每层的中点布置一个节点;设渗流前锋穿越第 j 层所用时间为 ΔT ,以此为步长对时间变步长离散,当渗流前锋到达不透水边界后,对时间按给定的步长 ΔT 离散.然后在

时间间隔 ΔT (时刻 T_k 到 T_{k+1})内,在第 j 控制容积内对方程(10)积分

$$\int_{T_k}^{T_{k+1}} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} dZ dT = \int_{T_k}^{T_{k+1}} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \frac{\partial U}{\partial Z} dZ dT \quad (16)$$

上式可改写为

$$\int_{T_k}^{T_{k+1}} \left(\frac{\partial U}{\partial Z} \Big|_x - \frac{\partial U}{\partial Z} \Big|_s \right) dT = \int_{\Delta Z}^{T_{k+1}} \left[\int_{T_k} \frac{\partial U}{\partial T} dT \right] dZ \quad (17)$$

式中:下标 X, S 分别为该控制容积的下、上边界.

对式(17)等式右边 U 关于 T 的偏导数以一阶向前差分近似,等式左边 U 关于 Z 的偏导数以中间差分近似,可得

$$\int_{T_k}^{T_{k+1}} \left[\left(\frac{U_{j+1} - U_j}{\Delta Z} \right) - \left(\frac{U_j - U_{j-1}}{\Delta Z} \right) \right] dT = (U_{j,k+1} - U_{j,k}) \Delta Z \quad (18)$$

式中:孔隙水压 U 的下标中,第一项表示空间节点,第二项表示时间离散点,下同.

计算式(18)右边的时间积分项,需要给出节点孔隙水压 U_{j+1}, U_j 和 U_{j-1} 随时间的变化关系,而这一关系是不知道的.通常利用 T_k 和 T_{k+1} 时刻的孔隙水压加权组合构成这一时间间隔内的平均值然后积分.取 T_k 和 T_{k+1} 时刻的权重分别为 0 和 1,即按全隐格式计算.尽管全隐格式的计算精度只有一阶截差,但可保证对任意时间步长 ΔT 都是无条件稳定的^[13].这样式(18)变为

$$U_{j-1,k+1} - \left(2 + \frac{\Delta Z^2}{\Delta T} \right) U_{j,k+1} + U_{j+1,k+1} = - \frac{\Delta Z^2}{\Delta T} U_{j,k} \quad (19)$$

2.2 初始条件和边界条件的处理

离散后的初始条件为 $U_{j,0} = 1, Z_{f,0} = 0$ (20)

对于控制容积 1,考虑到透水边界条件式(13),其上边界处的孔隙水压梯度可近似为

$$\frac{\partial U}{\partial Z} \Big|_s = \frac{U_{1,k+1}}{\Delta Z/2} \quad (21)$$

这样,式(17)最后的离散形式为

$$- \left(3 + \frac{\Delta Z^2}{\Delta T} \right) U_{1,k+1} + U_{2,k+1} = - \frac{\Delta Z^2}{\Delta T} U_{1,k} \quad (22)$$

设渗流前锋刚好到达控制容积 $k+1$ ($\leq N$) 的下表面,考虑到活动边界条件式(14),则式(17)

中的 $\frac{\partial U}{\partial Z} \Big|_x = I_b$,这样式(17)变为

$$U_{k,k+1} - \left(\frac{\Delta Z^2}{\Delta T} + 1 \right) U_{k+1,k+1} = - I_b \Delta Z - \frac{\Delta Z^2}{\Delta T} \quad (23)$$

同时,下式近似成立

$$U_{k+1,k+1} = 1 - I_b \Delta Z/2 \quad (24)$$

同理,当渗流前锋到达不透水边界后,考虑到

不透水边界条件式(15),式(17)可变为

$$U_{N-1,k+1} - \left(\frac{\Delta Z^2}{\Delta T} + 1 \right) U_{N,k+1} = -I_b \Delta Z - \frac{\Delta Z^2}{\Delta T} U_{N,k} \quad (25)$$

这样式(19)~(20)和(22)~(25)就构成了封闭方程组,可联合求解.不过当 $k < N$ 时, ΔT 为未知量,相应的方程组为非线性的,可用试算法计算;当 $k \geq N$ 时, ΔT 为我们设定的时间步长,相应的方程组是线性的,可用追赶法计算.

3 结果分析

以下计算中,取100个控制容积.

3.1 渗流前锋

求解前节的差分方程组,得到了不同 I_b 时渗流前锋的运动规律,由图2可知,由于存在起始水力梯度,渗流并非瞬时在整个厚度发生,而是首先发生在排水边界,随着时间推移,逐渐向不排水边界推进,并且 I_b 越大,推进速度越慢.根据式(9)可知,起始水力梯度 i_b ,土层厚度 H 以及上覆压力 p_0 都显著影响着渗流前锋的推进速度.

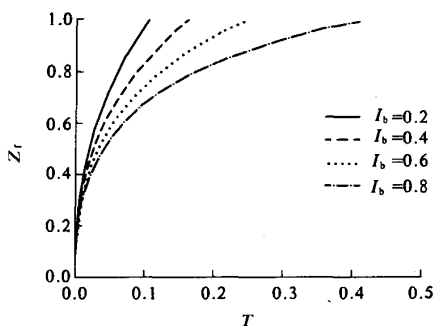


图2 渗流前锋的运动

Fig. 2 Motion of the front of seepage

3.2 孔隙水压力

文献[9]的试验结果却与之矛盾,即在主固结完成时,土样中残余一定的孔隙水压没有完全消散.这是现有的固结理论所无法解释的.但是如果考虑到低渗黏土存在渗流起始水力梯度,这一结论却是显而易见的.图3给出了 $I_b = 0.6$ 时几个特殊深度处孔隙水压力随时间的变化规律.很明显,当渗流前锋到达某深度后,随着时间推移,该深度处的孔隙水压力逐渐消散,且消散速率越来越慢,当时间因素 T 很大($> 2 \sim 3$)时,孔隙水压力已几乎不再变化,即存在一残余值 U_c .无法完全消散.这可通过示于图4的不同时刻孔隙水

压力的分布规律得到解释:随着时间的推移,孔隙水压力的分布曲线越来越趋向于一条斜率为 I_b (图中为0.6)的直线.

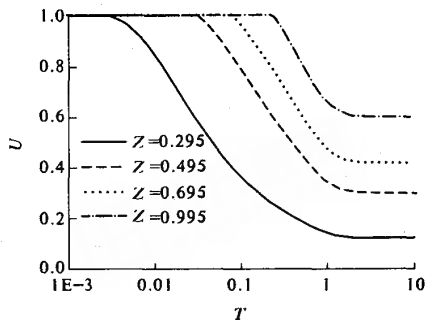


图3 孔隙水压力与时间的关系($I_b = 0.6$)

Fig. 3 Relations between pore water pressure and time ($I_b = 0.6$)

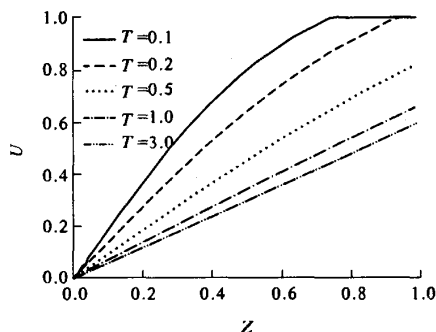


图4 孔隙水压力的分布规律($I_b = 0.6$)

Fig. 4 Distribution of pore water pressure ($I_b = 0.6$)

3.3 固结度

计算出任意时刻地基任意深度处的孔隙水压力 $U(Z, T)$ 后,就可以计算平均固结度 U_t .图5为不同 I_b 时平均固结度 U_t 与时间因素 T 的关系曲线,其中的 $I_b = 0$ 线为Terzaghi固结理论的计算结果.很明显,考虑起始水力梯度的曲线都在 $I_b = 0$ 线的下方,且 I_b 越大,与 $I_b = 0$ 线的距离越大.这说明Terzaghi固结理论由于忽略了起始水力梯度,将会高估地基的固结度.同时,由式(9)可得到结论:起始水力梯度 i_b ,土层厚度 H 以及上覆压力 p_0 也都显著影响着地基的固结速度.

从图5知,每条 $I_b > 0$ 的曲线都趋向于一个小于1的值,且该极限值随 I_b 增大而变小,即地基的最终平均固结度 U_c 小于1,且与 I_b 有关.归结为存在残余孔隙水压力不能完全消散的缘故.

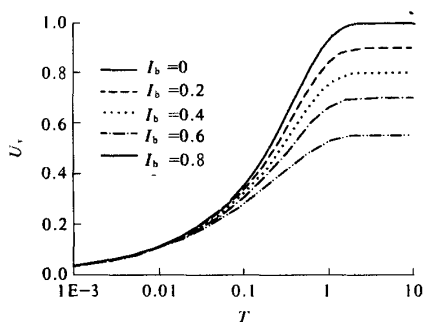


图5 固结度与时间的关系曲线

Fig. 5 Relations between degree of consolidation and time

4 结论

(1) 以考虑起始水力梯度的非 Darcy 渗流方程代替 Darcy 定律,修正了 Terzaghi 饱和黏土一维固结方程,用有限体积法的数值分析表明,除固结系数外, $I_b = i_b \gamma_w H / P_0$ 也是一个表述饱和黏土固结特性的重要指标。

(2) 考虑起始水力梯度时,地基的固结速率比 Terzaghi 固结理论慢,而且起始水力梯度越大,黏土层越厚,或上覆压力越小,地基固结速度越慢。

(3) 只要起始水力梯度大于零,地基中就存在一定的残余孔隙水压力无法完全消散,因而地基的最终平均固结度总小于 1。

参考文献:

- [1] DAVIS E H, RAYMAND G P. A non-linear theory of consolidation [J]. *Getechnique*, 1965, 15(2): 161 ~ 173.
- [2] MERSI G, ROKHSAR A. Theory of consolidation of clays [J]. *Journal of geotechnical Engineering*, ASCE, 1974,

100(8): 889 ~ 903.

- [3] 施建勇,杨立昂,赵维炳. 考虑土体非线性特性的一维固结理论研究[J]. *河海大学学报*, 2001, 29(1): 1 ~ 5.
- [4] GIBSON R E, SCHIFFMAN R L, CARGILL K W. Theory of one-dimensional consolidation of saturated clays: II finite non-linear consolidation of thick homogeneous layers [J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1981, 19(2): 280 ~ 293.
- [5] 谢新宇,朱向荣,谢康和,等. 饱和土体一维大变形固结理论新进展[J]. *岩土工程学报*, 1997, 19(4): 30 ~ 38.
- [6] 谢康和. 双层地基一维固结理论与应用[J]. *岩土工程学报*, 1994, 16(5): 24 ~ 35.
- [7] 吴雄志. 考虑渗流力时对太沙基一维固结理论的修正[J]. *岩土力学*, 2004, 25(8): 1279 ~ 1282.
- [8] 谢康和,潘秋元. 变荷载下任意层地基一维固结理论[J]. *岩土工程学报*, 1995, 17(5): 80 ~ 85.
- [9] 施建勇,问延煦,雷国辉,等. 固结试验及其相关问题的讨论[J]. *河海大学学报(自然科学版)*, 2004, 32(2): 213 ~ 215.
- [10] SERGE L. Recent developments in consolidation of natural clays [J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1988, 25(1): 85 ~ 105.
- [11] LAW K T, LEE C F. Initial gradient in a dense glacial till [C]. *Proc 10th Int Conf on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Stockholm, 1981, 1: 441 ~ 446.
- [12] 邓英尔,刘慈群,黄润秋,等. 高等渗流理论与方法 [M]. 科学出版社, 2004.
- [13] 李人宪. 有限体积法基础 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2005.

One-dimensional Consolidation of Saturated Clays Considering Initial Hydraulic Gradient

LIU Zhong-yu¹, LIU Zhong-guang², MA Chong-wu³

(1. School of Civil Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China; 2. Henan Textile College, Zhengzhou 450007, China; 3. Department of Civil Engineering, Dongguan University of Technology, Dongguan 523808, China)

Abstract: Terzaghi's one-dimensional consolidation theory is modified based on the modified non-Darcy seepage equation considering the initial hydraulic gradient, and solved by using the finite volume method in this paper. The analytical results indicate that, for the soil with the initial hydraulic gradient greater than zero, the rate of consolidation is less than that by applying Terzaghi's consolidation theory, and the initial hydraulic gradient, the thickness of the layer and the ground pressure, besides the consolidation coefficient, also play important roles in the process of consolidation. In addition, it is validated that there exists some residual pore pressure which cannot be completely dissipated in the soil layer at the end of primary consolidation.

Key words: consolidation theory; non-Darcy seepage; initial hydraulic gradient; finite volume method