

## 基于模糊数的模糊过程质量控制图研究

侯世旺, 同淑荣

(西北工业大学 管理学院, 陕西 西安 710072)

**摘 要:** 针对传统计数型控制图由二分法对产品质量的分类, 与产品质量的渐进而非突变过程不相符, 难以满足对过程及产品质量的精细化控制的状况, 提出由专家组对产品质量进行主观评分, 对此模糊结果统计分析, 以模糊数的形式形成对产品质量的集体观点, 并以此模糊数绘制控制图, 应用可能性测度、必要性测度两种方法对过程中心趋势以及模糊度进行监控, 以此判断过程的控制状态, 实现对具有模糊质量特性的过程的监控。

**关键词:** 模糊过程; 质量控制; 模糊数; 控制图

**中图分类号:** C 931

**文献标识码:** A

### 0 引言

控制图作为 SPC 的主要工具之一, 被广泛应用于过程稳定状态及过程能力的监控。它以产品(或服务)的一个或几个质量相关特性的度量值为操作对象。当质量特性值为连续、可测变量时, 采用计量型控制图, 而质量特性值为非连续、不可测变量时采用计数型控制图。控制图通过控制限及统计检验将正常波动与异常波动区分开来。传统计数型控制图(如 p 图、np 图、c 图及 u 图等)中, 产品质量通常由二分法分为合格或不合格两类, 但产品质量的变化是一个渐进而非突变过程, 仅用合格与不合格对产品质量加以严格区分难以满足对过程及产品质量的精细化控制。

近几年, 许多研究者应用模糊语言变量对产品质量的中间水平加以描述, 例如“非常差、很差、差、一般、好、很好、非常好”等, 并对以实数集或其子集为论域的词汇给出了定量描述的语义规则, 事先确定的隶属函数对产品质量模糊描述的准确程度对其应用效果影响很大<sup>[1-6]</sup>。

笔者提出一种利用模糊数对产品质量进行描述, 并以此构造模糊控制图的方法, 应用可能性测度、必要性测度两种方法对过程中心趋势以及模糊度进行监控, 据以判断过程的受控状态。

### 1 模糊数的构造

#### 1.1 模糊数定义

模糊数在决策中占有十分重要的地位, 是表

达模糊信息及决策者模糊偏好的较好工具。为了描述方便, 首先引入模糊数的相关定义:

**定义 1** 设  $\mathbf{R}$  为实数域,  $\mathbf{R}$  上的模糊集的全体记为  $\mathcal{F}(\mathbf{R})$ 。若有  $A \in \mathcal{F}(\mathbf{R})$ , 并且存在闭区间  $[c, d] \subset \mathbf{R}$ , 使得

- (1) 在  $[c, d]$  上,  $\mu_A(x) = 1$ ;
- (2) 在  $(-\infty, c)$  上,  $\mu_A(x)$  为右连续的增函数, 且  $0 \leq \mu_A(x) < 1$ ;
- (3) 在  $(d, +\infty)$  上,  $\mu_A(x)$  为左连续的减函数, 且  $0 \leq \mu_A(x) < 1$ 。

则称  $A$  为  $\mathbf{R}$  上的一个模糊数。

根据隶属函数的几何形状, 常用的模糊数有三角模糊数、梯形模糊数、正态模糊数等。在决策分析中, 由于决策者较易用三角模糊数和不规则梯形模糊数来表达其模糊偏好, 所以这两种模糊数最常用。而三角模糊数是梯形模糊数的特例, 适合质量专家根据对产品质量的直觉感知做出模糊评分的场合, 笔者采用三角模糊数。

参数为  $a, b, m$  的三角模糊数的隶属函数定义如下, 如图 1 所示。

$$T(g; a, m, b) = \begin{cases} 1 - \frac{m-g}{m-a}, & (a \leq g \leq m) \\ 1 - \frac{g-m}{b-m}, & (m \leq g \leq b) \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (1)$$

#### 1.2 模糊数的构造

应用模糊理论来衡量主观判断过程的一个主

收稿日期: 2007-09-30; 修订日期: 2007-12-24

作者简介: 侯世旺(1978-), 男, 山西太原人, 西北工业大学博士研究生, 主要从事质量工程、过程质量智能控制与诊断方面的研究, E-Mail: houshiwang@163.com

要步骤就是将语言变量值转换成模糊数. 通常的模糊质量评价, 往往预先给定了语言变量(或质量等级)的隶属函数, 不能很好地考虑各专家评分时的判断模糊性. 本文由专家组根据各自对待检产品质量项的直觉感知, 在一定分值范围内做出评分, 然后由此出发估计评分模糊数的隶属函数.

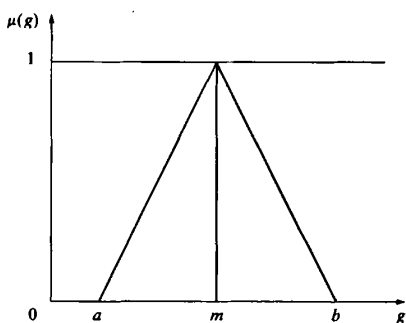


图1 三角模糊数 $(a, m, b)$ 隶属函数图  
Fig.1 Membership function of a triangular fuzzy number  $(a, m, b)$

假设产品质量的评分范围为 $[0, G]$ ,  $g_1, g_2, \dots, g_n$ 分别为 $n$ 个专家对同一产品的评分, 不同专家对于同一产品的评分不同, 同一专家对一个产品重复评估时评分也会不同, 评分可以看作分值概率分布的一次抽样实现. 下面介绍由一系列评分观察值 $g_1, g_2, \dots, g_n$ 获取隶属函数的方法.

对模糊数众数的估计包含对中心的定位, 使 $g_1, g_2, \dots, g_n$ 聚集在它的周围. 估计过程中, 距中心较近的评分具较高的重要度, 即中心为 $g_i$ 的加权平均数. 这里应用 $g_i$ 之间的相互距离, 用相互距离矩阵 $D$ 表示,  $D = [d_{ij}]_{n \times n}$ , 其中 $d_{ij} = |g_i - g_j|$ , 且 $d_{ii} = 0$ ,  $d_{ij} = d_{ji}$ .  $g_i$ 的相互距离平均值 $\bar{d}_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} / (n-1)$ , 它用于度量 $g_i$ 与中心的接近程度.  $\bar{d}_i$ 越小, 越接近中心, 估计模糊数众数时分配的权重越高. 为了确定每个 $g_i$ 的重要程度, 对 $g_i$ 的相互距离平均值进行逐对比较, 得到比较矩阵 $P$ ,  $P = [p_{ij}]_{n \times n}$ ,  $p_{ij}$ 为 $g_i$ 对 $g_j$ 的相对重要度,  $p_{ij} = \bar{d}_j / \bar{d}_i$ , 且 $p_{ii} = 1$ ,  $p_{ji} = 1/p_{ij}$ . 令 $\omega_i$ 为 $g_i$ 的实际重要度,  $0 \leq \omega_i \leq 1$ , 那么

$$p_{ij} = \frac{\omega_i}{\omega_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

上式改写为向量形式为:  $P\omega = n\omega$ , 将 $n$ 看作 $P$ 的特征值, 而 $\omega$ 为对应的特征向量. 假设 $\sum_{i=1}^n \omega_i$

$= 1$ , 可用下式求解 $\omega$

$$\omega_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^n p_{ij}} \quad (3)$$

$\omega_i$ 代表分配给 $g_i$ 的权重, 模糊众数:

$$m = \sum_{i=1}^n \omega_i g_i \quad (4)$$

为了估计模糊数的散布情况, 即确定其左右端点, 采用如下的模糊数方差:

$$\begin{aligned} \text{Var}(F) &= \int_0^1 \lambda \left( \frac{e'(\lambda) + e''(\lambda)}{2} - e'(\lambda) \right)^2 d\lambda \\ &\quad + \int_0^1 \lambda \left( \frac{e'(\lambda) + e''(\lambda)}{2} - e''(\lambda) \right)^2 d\lambda \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \lambda [e''(\lambda) - e'(\lambda)] d\lambda \end{aligned} \quad (5)$$

其中:  $e'(\lambda)$ 、 $e''(\lambda)$ 分别为模糊集 $F$ 的 $\lambda$ -截集的上下限. 为了考虑不同 $\lambda$ -截集的重要程度, 引入权重函数 $\omega(\lambda)$ , 式(5)修正为

$$\text{Var}_\omega(F) = \int_0^1 \left( \frac{e''(\lambda) - e'(\lambda)}{2} \right)^2 \omega(\lambda) d\lambda \quad (6)$$

其中:  $\int_0^1 \omega(\lambda) d\lambda = 1$ , 且 $\omega(\lambda)$ 为非负、单调递增函数. 当 $\omega(\lambda) = 2\lambda$ 时,  $\text{Var}(F) = \text{Var}_\omega(F)$ .

将利用式(3)定义求解得到的权重代入式(6)估计模糊数加权方差. 为了在估计过程可以直接利用专家分值, 定义三角模糊数加权方差函数如下<sup>[7]</sup>:

$$\begin{aligned} \text{Var}_\omega(F) &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 (m - e'(\lambda))^2 \omega(\lambda) d\lambda + \right. \\ &\quad \left. \int_0^1 (m - e''(\lambda))^2 \omega(\lambda) d\lambda \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

式中:  $m$ 为模糊众数, 用它代替式(5)中的算术平均值. 当模糊数对称时, 式(6)与式(7)相等<sup>[8]</sup>.

假设 $a, b$ 分别为模糊数的左右端点,  $\omega(\lambda) = 2\lambda$ , 式(7)可以变形为

$$s^2 = \text{Var}_\omega(F) = \frac{(m-a)^2 + (b-m)^2}{12} \quad (8)$$

定义模糊数 $F$ 左、右伸展的比率为 $\rho$

$$\rho = \frac{m-a}{b-m} \quad (9)$$

由(6)、(7)式可以求解得到 $a, b$ 为

$$a = m - \sqrt{\frac{12\rho^2 s^2}{1+\rho^2}} \quad (10)$$

$$b = m + \sqrt{\frac{12s^2}{1+\rho^2}} \quad (11)$$

下面介绍对上式未知参数 $\rho, s$ 的估计方法. 利用式(7)计算分值的样本方差对 $s$ 做出估计:

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sum_{i \in \arg(g_i < m)} \omega_i (m - g_i)^2}{\sum_{i \in \arg(g_i < m)} \omega_i} + \frac{\sum_{i \in \arg(g_i > m)} \omega_i (m - g_i)^2}{\sum_{i \in \arg(g_i > m)} \omega_i} \right\} \quad (12)$$

假设  $g^l, g^r$  分别为小于  $m$  与大于  $m$  的评分值的加权平均数, 即

$$g^l = \frac{\sum_{i \in \arg(g_i < m)} \omega_i g_i}{\sum_{i \in \arg(g_i < m)} \omega_i} \quad (13)$$

$$g^r = \frac{\sum_{i \in \arg(g_i > m)} \omega_i g_i}{\sum_{i \in \arg(g_i > m)} \omega_i} \quad (14)$$

利用公式(9)对  $\rho$  做出估计:

$$\hat{\rho} = \frac{m - g^l}{g^r - m} \quad (15)$$

### 2.3 模糊数构造举例

假设由 5 个专家对产品进行检测评分,  $g_1 = 3, g_2 = 4, g_3 = 5, g_4 = 5, g_5 = 7$ , 相应的距离矩阵  $D$  为

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

5 个分值的相关距离平均值分别为:  $\bar{d}_1 = 2.25, \bar{d}_2 = 1.5, \bar{d}_3 = 1.25, \bar{d}_4 = 1.25, \bar{d}_5 = 2.75$ , 得到比较矩阵  $P$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0.667 & 0.556 & 0.556 & 1.222 \\ 1.5 & 1 & 0.833 & 0.833 & 1.834 \\ 1.8 & 1.2 & 1 & 1 & 2.2 \\ 1.8 & 1.2 & 1 & 1 & 2.2 \\ 0.818 & 0.545 & 0.454 & 0.454 & 1 \end{bmatrix}$$

由公式(3)可得各分值的权重系数分别为  $\omega_1 = 0.145, \omega_2 = 0.217, \omega_3 = 0.26, \omega_4 = 0.26, \omega_5 = 0.118$ . 由式(4)可得分值的模糊众数为  $m = 4.73$ , 由公式(12) - (15)得  $\hat{s}^2 = 1.265, g^l = 3.6, g^r = 5.37, \hat{\rho} = 1.767, a = 0.916, b = 6.889$ .

### 3 模糊控制图

为了获取构造模糊控制图需要的过程均值信息, 用过程受控时的样本均值加以估计. 假设一个容量为  $n$  的模糊分值样本为:  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , 过程均值  $\bar{S}(\bar{a}, \bar{m}, \bar{b})$

$$\bar{S} = \frac{\sum_{i=1}^n S_i}{n} \quad (16)$$

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}, \hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{n}, \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n b_i}{n} \quad (17)$$

随着生产过程的继续, 周期性随机抽取样本, 并将样本均值与过程均值比较, 从可能性、必要性测度两个方面判断过程是否受控.

#### 3.1 可能性、必要性测度

模糊数控制图的基本思路就是对样本均值与受控过程均值之间的匹配程度进行度量, 匹配度高就认为过程继续处于受控状态.

定义 2 设  $A, B \in \mathcal{F}(X)$ , 称

$$\text{Pos}(B|A) = \sup_{x \in X} \min \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \} \quad (18)$$

$$\text{Nec}(B|A) = \inf_{x \in X} \max \{ 1 - \mu_A(x), \mu_B(x) \} \quad (19)$$

为模糊集  $B$  在模糊集  $A$  发生条件下的可能性测度和必要性测度, 其中,  $x \in X, \mu_A, \mu_B$  分别是模糊集  $A$  和  $B$  的隶属函数.

用样本均值  $\bar{S}$  表示对目前过程水平的估计, 在给定  $\bar{S}$  的概率分布的条件下, 对  $\bar{S}$  与  $\bar{S}$  匹配度的度量包含上述两个方面.

$$\text{Pos}(\bar{S}|\bar{S}) = \sup_{z \in U} \min \{ \mu_{\bar{S}}(z), \mu_{\bar{S}}(z) \} \quad (20)$$

$$\text{Nec}(\bar{S}|\bar{S}) = \inf_{z \in U} \max \{ \mu_{\bar{S}}(z), 1 - \mu_{\bar{S}}(z) \} \quad (21)$$

#### 3.2 模糊数控制图判断

设  $\bar{S}(\bar{a}, \bar{m}, \bar{b}), \bar{S}(\hat{a}, \hat{m}, \hat{b})$  分别为受控过程均值与样本均值. 继续处于受控状态的过程必须满足下列条件: (1) 模糊分值样本均值的可能性测度必须不小于用户设定的参数  $\alpha (0 < \alpha \leq 1)$ , 即  $\text{Pos}(\bar{S}|\bar{S}) \geq \alpha^{[9]}$ ; (2) 模糊分值样本均值的必要性测度必须不小于用户设定的参数  $\beta (0 < \beta \leq 0.5)$ , 即  $\text{Nec}(\bar{S}|\bar{S}) \geq \beta$ .

图 2、图 3 分别为  $\text{Pos}(\bar{S}|\bar{S})$  与  $\text{Nec}(\bar{S}|\bar{S})$  在不同取值情况下  $\bar{S}, \bar{S}$  截集区间的相互关系. 分析上面的图形可以发现, 满足条件  $\text{Pos}(\bar{S}|\bar{S}) \geq \alpha, \text{Nec}(\bar{S}|\bar{S}) \geq \beta$  的  $\bar{S}, \bar{S}$  截集区间有如下特性:

(1) 如果  $\text{Pos}(\bar{S}|\bar{S}) \geq \alpha$ , 那么  $\bar{S}_\alpha \cap \bar{S}_\alpha \neq \emptyset$ ;

(2) 如果  $\text{Nec}(\bar{S}|\bar{S}) \geq \beta$ , 那么  $\bar{S}_\beta \cap \bar{S}_{1-\beta}$ .

上述两条可以作为过程可能性测度、必要性测度的判异准则, 用于下面对模糊控制图的判断.

#### 3.3 案例分析

假设过程处于稳定状态下产品的专家评分均值为三角模糊数  $\bar{S}(5, 6, 7)$ , 在随后的生产期间抽取的 5 个样本的评分均值分别为三角模糊数

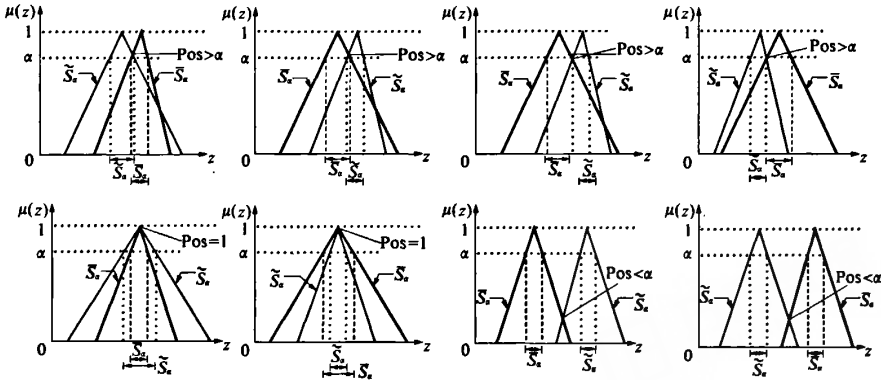


图2 不同情况下可能性测度示意图

Fig. 2 The schematic illustration of possibility measure in different cases

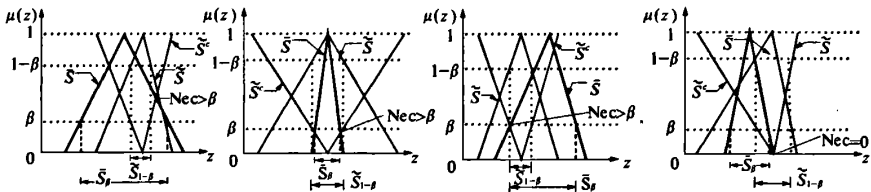


图3 不同情况下必要性测度示意图

Fig. 3 Schematic illustration of possibility measure in different cases

$\tilde{S}_1(5.5, 6.3, 6.8)$ ,  $\tilde{S}_2(4.6, 5.6, 6.6)$ ,  $\tilde{S}_3(3, 6, 9)$ ,  $\tilde{S}_4(3, 7, 8.5)$ ,  $\tilde{S}_5(6.5, 7.5, 8.5)$ . 取  $\alpha = 0.8$ , 由式(20)得,  $\text{Pos}(\bar{S}|\tilde{S}_1) = 0.83$ ,  $\text{Pos}(\bar{S}|\tilde{S}_2) = 0.8$ ,  $\text{Pos}(\bar{S}|\tilde{S}_3) = 1$ ,  $\text{Pos}(\bar{S}|\tilde{S}_4) = 0.8$ ,  $\text{Pos}(\bar{S}|\tilde{S}_5) = 0.25$ ,  $\bar{S}_{0.8}[5.8, 6.2]$ ,  $(\tilde{S}_1)_{0.8}[6.14, 6.4]$ ,  $(\tilde{S}_2)_{0.8}[5.4, 5.8]$ ,  $(\tilde{S}_3)_{0.8}[5.4, 6.6]$ ,  $(\tilde{S}_4)_{0.8}[6.2, 7.3]$ ,  $(\tilde{S}_5)_{0.8}[7.3, 7.7]$ .

取  $\beta = 0.3$ , 由式(21)得,  $\text{Nec}(\bar{S}|\tilde{S}) = 0.47$ ,  $\text{Nec}(\bar{S}|\tilde{S}_1) = 0.3$ ,  $\text{Nec}(\bar{S}|\tilde{S}_2) = 0.25$ ,  $\text{Nec}(\bar{S}|\tilde{S}_3) = 0$ ,  $\text{Nec}(\bar{S}|\tilde{S}_4) = 0$ ,  $\bar{S}_{0.3}[5.3, 6.7]$ ,  $(\tilde{S}_1)_{0.7}[6.06, 6.4]$ ,  $(\tilde{S}_2)_{0.7}[5.3, 5.9]$ ,  $(\tilde{S}_3)_{0.7}[5.1, 6.9]$ ,  $(\tilde{S}_4)_{0.7}[5.8, 7.45]$ ,  $(\tilde{S}_5)_{0.7}[7.2, 7.8]$ .

对前述例子, 结合可能性测度、必要性测度, 绘制模糊控制图. 图4中上下控制限为过程均值  $\bar{S}$  的  $\alpha$ -截集的左、右端点, 样本均值  $\tilde{S}$  的  $\alpha$ -截集的左、右端点以竖线的形式绘制于控制图上, 根据与控制线的交叉情况, 即可能性测度判异准则, 做出过程受控与否的判断. 图5中上下控制限为过程均值  $\bar{S}$  的  $\beta$ -截集的左、右端点, 样本均值  $\tilde{S}$  的  $\beta$ -截集的补集的左、右端点以竖线的形式绘制于控制图上, 根据与控制区间的包含关系即必要性测度判异准则, 做出过程受控与否的判断.

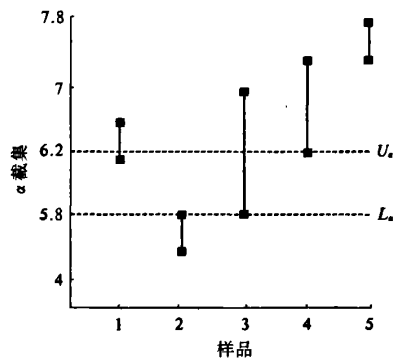


图4 可能性测度模糊控制图

Fig. 4 Fuzzy control chart obtained by possibility measure

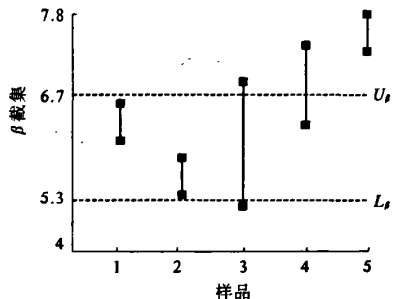


图5 必要性测度模糊控制图

Fig. 5 Fuzzy control chart obtained by necessity measure

#### 4 结论

在控制图4中,样本5的 $\alpha$ -截集区间与过程均值的 $\alpha$ -截集区间交集为空集,不满足可能性测度准则,认为过程异常;在控制图5中,样本3,4,5的 $\beta$ -截集区间没有被过程均值的 $\beta$ -截集区间包含,不满足必要性测度准则,认为过程异常.总体来看只有样本1,2对应的过程正常.

为了方便上述方法的在线应用,减少对于专家评分的依赖,可以通过人工神经网络获取专家评分过程的知识,即将样本产品的专家评分情况与产品的相关质量特性值建立对应关系,并以此作为网络的训练数据,可以将产品质量特性的在线检测值作为网络的输入,网络输出为产品的评分值,并以此作为模糊数控制图的输入,从而实现模糊数控制图的在线自动监测.

#### 参考文献:

- [1] KANAGAWA A, TAMAKI F, OHTA H. Control charts for process average and variability based on linguistic data[J]. Internat J Production Res, 1993, 31: 913 - 922.
- [2] WANG J H, RAZ T. On the construction of control charts using linguistic variables[J]. Internat J Production Res, 1990, 28: 477 - 487.
- [3] Murat Gülbay, Cengiz Kahraman. Development of fuzzy process control charts and fuzzy unnatural pattern analyses[J]. J Computational Statistics & Data Analysis, 2006, 51: 434 - 451.
- [4] Gülbay M, Kahraman C, Ruan D.  $\lambda$ -cut fuzzy control charts for linguistic data [J]. Int J Intell Systems, 2004, 19: 1173 - 1196.
- [5] 董杨琴,肖亮,吴慧中.基于语言评价与模糊数的群体意见共识方法[J].火力与指挥控制, 2007, 32(3): 22 - 30.
- [6] 蔡正英,程谷辉.模糊控制图与过程质量控制[J].中国质量, 2005, (2): 77 - 79.
- [7] Carlsson C, Fullér R. On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers [J]. Fuzzy Sets and Syst, 2001, 122(7): 315 - 326.
- [8] Fullér R, Majlender P. On weighted possibilistic mean and variance of fuzzy numbers [J]. Fuzzy Sets and Syst, 2003, 126: 363 - 374.
- [9] DUBOIS D, PRADE H. Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory [J]. Inform Sci, 1983, 30: 183 - 224.

### The Study of Control Chart for Fuzzy Process Quality Control Based on Fuzzy Number

HOU Shi - wang, TONG Shu - rong

(School of Management, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** Products' quality is generally classified in a binary manner (conforming or nonconforming) in traditional attributed control charts. Binary classification may not be the most suitable if the product quality changes gradually rather than abruptly and may not satisfy the finely control of process or products quality. This paper presents the construction of fuzzy control charts for a process with fuzzy outcomes derived from the subjective quality ratings provided by a group of experts. The individual numerical ratings are then aggregated to form collective opinions expressed in the form of fuzzy numbers. The fuzzy quality ratings are then plotted on fuzzy control charts, of which the construction and out-of-control conditions are developed using possibility theory. The developed control charts not only monitor the central tendency of the process, but also indicate its degree of fuzziness, and can be used to monitor the process with fuzzy quality characteristics.

**Key words:** fuzzy process; quality control; fuzzy number; control chart