

自锚式悬索桥自由振动研究

李 杰, 李 娜

(郑州大学 土木工程学院, 河南 郑州 450001)

摘 要: 悬索桥自振特性分析是研究悬索桥抗风、抗震以及其它动力效应的基础。考虑加劲梁的压弯效应, 计入大缆倾角和纵向位移的影响, 基于大位移不完全广义势能泛函分析, 运用变分原理推导了双塔三跨连续自锚式悬索桥加劲梁的自由振动微分方程, 并根据简化后的微分方程得到自锚式悬索桥纵向和竖向频率计算公式, 最后通过两个算例验证公式基本合理。

关键词: 自锚悬索桥; 自由振动; 泛函变分; 频率公式

中图分类号: U 441

文献标识码: A

0 引言

结构的振动特性^[1-2]是研究结构抗震、抗风设计和其他动力学分析诸如反应谱分析、谐响应分析的基础。国内外很多学者从解析法、近似法以及数值法等途径对悬索桥的振动特性做了很多研究, 文献[3]中给出了悬索桥固有振动经验公式; 文献[4-6]基于变分法对悬索桥振动微分方程做了详细推导。但相对于地锚悬索桥, 自锚式悬索桥振动特性的研究较少: 一些学者应用数值方法对自锚悬索桥动力特性进行对比研究, 例如文献[7-8]; 文献[9-10]考虑了自锚式悬索桥加劲梁的压弯耦合效应, 对自锚式悬索桥自由振动做了推导。笔者基于广义势能泛函的变分, 考虑垂跨比引起大缆较大倾角和大缆纵向位移的影响, 对双塔三跨连续自锚式悬索桥纵向和竖向自由振动微分方程进行推导, 并根据简化后微分方程得到纵向振动和竖向振动频率计算公式。

1 自锚式悬索桥空间耦合自由振动分析

笔者的推导基于图1所示的三跨自锚式悬索桥, 将其看作一个连续系统来建立空间耦合自由振动方程。分析之前有如下的假定^[5]: 所有材料符合虎克定律; 恒载沿跨度均布, 且完全为缆索支撑, 故在无活载状态下, 缆索为抛物线型, 加劲梁为无弯曲应力(无弯矩)状态; 在各跨内, 加劲梁为等截面直梁, 不考虑加劲梁的竖曲线; 吊杆是稠

密的, 不考虑吊杆的拉伸; 不考虑塔的顺桥向抗弯刚度以及轴向压缩变形, 塔的横向刚度被认为是充分大的, 以至塔的横桥向变形可以忽略不计; 考虑加劲梁断面在扭转时的翘曲变形, 但不考虑断面的畸变, 即假定横联或横隔板是稠密的且剪切刚度充分大; 自由振动幅度与静力平衡时结构的外形相比很小, 在整个振动过程中可以认为结构的刚度保持不变。

记缆索和加劲梁的应变能分别为 V_{ce} 和 V_{se} , 重力势能为 V_g , 动能为 T , 则自锚悬索桥空间耦合振动问题的大位移不完全广义势能泛函为

$$\Pi = \int_0^{l_2} \left(T - V_{ce} - V_{se} - V_g - \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \lambda_i f_i dx_i - \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \lambda_i f_i dx_i \right) dt \quad (1)$$

式中: λ_i 和 λ_i 为 Lagrange 乘子; f_i 和 f_i 分别表示左侧和右侧吊杆无延伸的约束条件; i 表示三跨自锚悬索桥中的某一跨。

1.1 缆索应变能 V_{ce}

振动时基本变位见图1(b)所示, 其中所考虑的变位有: 加劲梁的竖向位移 v , 横向位移 w , 扭转角 γ , 左侧主缆的纵向、竖向和横向位移 u_1 、 v_1 和 w_1 , 右侧主缆的纵向、竖向和横向位移 u_r 、 v_r 和 w_r 。恒载状态下缆索静止时的微段长度为

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad (2)$$

振动时缆索微段的变形见图1(c)和图1(d), 以右缆为例, 大缆微段变形后存在如下几何关系:

$$(ds + \Delta ds_r)^2 = (dx + du_r)^2 + (dy + dv_r +$$

收稿日期: 2007-10-04; 修订日期: 2007-12-27

作者简介: 李 杰(1974-), 男, 陕西宝鸡人, 郑州大学讲师, 博士, 主要从事桥梁结构理论研究、桥梁结构分析,

E-mail: public_li@126.com.

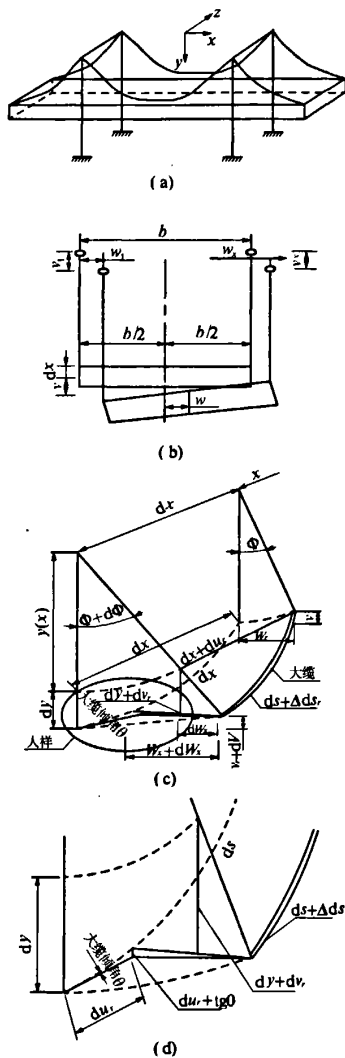


图1 自锚式悬索桥的自由振动分析
Fig.1 Free vibrations analysis of self-anchored suspension bridge

$$du_i \tan \theta)^2 + (dw_i)^2 \quad (3)$$

式中: $(ds + \Delta ds_r)$ 是右侧大缆微段变形后的长度; $(dx + du_r)$ 、 $(dy + dy_r + du_r \tan \theta)$ 和 dw_r 分别是右侧大缆微段变形后在 x (纵向)、 y (竖向) 和 z (横向) 方向的投影长度. 竖向 $(dy + dy_r + du_r \tan \theta)$ 考虑了自锚悬索桥矢跨比较大的影响, θ 为大缆倾角. 当悬索桥矢跨比小于 1:8 时, 可忽略大缆倾角的影响^[6]. 而地锚悬索桥矢跨比通常小于 1:9, 所以忽略方程式(3)中大缆倾角影响即为文献[4-6, 9-10]中大缆微段变形后的几何关系.

将式(2)代入式(3), 并略去高阶小量化简得到:

$$\Delta ds_r = \frac{\partial u_r}{\partial x} \frac{dx}{ds} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} \right)^2 \frac{dx}{ds} dx + \frac{\partial v_r}{\partial x} \frac{dy}{ds} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} \right)^2 \frac{dx}{ds} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_r}{\partial x} \right)^2 \frac{dx}{ds} dx + \frac{\partial u_r}{\partial x} \frac{\partial v_r}{\partial x} \tan \theta \frac{dx}{ds} dx \quad (4a)$$

对于左缆, 同理可得

$$\Delta ds_l = \frac{\partial u_l}{\partial x} \frac{dx}{ds} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x} \right)^2 \frac{dx}{ds} dx + \frac{\partial v_l}{\partial x} \frac{dy}{ds} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_l}{\partial x} \right)^2 \frac{dx}{ds} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_l}{\partial x} \right)^2 \frac{dx}{ds} dx + \frac{\partial u_l}{\partial x} \frac{\partial v_l}{\partial x} \tan \theta \frac{dx}{ds} dx \quad (4b)$$

缆索的变形是由于振动惯性力导致缆索内力增加而引起, 根据虎克定律:

$$\Delta ds_r = \frac{H_r(t)(ds)^2}{E_c A_{c1} dx}, \quad \Delta ds_l = \frac{H_l(t)(ds)^2}{E_c A_{c1} dx} \quad (5)$$

式中: A_{c1} 为一侧缆索的截面积; $H_l(t)$ 和 $H_r(t)$ 分别表示由于惯性力引起的左侧和右侧缆索水平缆力增量.

将式(4)代入式(5)沿三跨积分, 且 $\frac{dx}{ds} = \cos \theta$, 得如下缆索相容方程:

$$H_r(t) = \frac{E_c A_{c1}}{L_c} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{q}{H_q} \int_0^{L_i} u_i dx_i + \frac{q}{H_q} \int_0^{L_i} v_i dx_i + \frac{1}{2} \int_0^{L_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx_i + \frac{1}{2} \int_0^{L_i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} \right)^2 dx_i + \frac{1}{2} \int_0^{L_i} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} \right)^2 dx_i + \int_0^{L_i} \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial v_i}{\partial x} \tan \theta dx_i \right] \quad (6a)$$

$$H_l(t) = \frac{E_c A_{c1}}{L_c} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{q}{H_q} \int_0^{L_i} u_i dx_i + \frac{q}{H_q} \int_0^{L_i} v_i dx_i + \frac{1}{2} \int_0^{L_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx_i + \frac{1}{2} \int_0^{L_i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} \right)^2 dx_i + \frac{1}{2} \int_0^{L_i} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} \right)^2 dx_i + \int_0^{L_i} \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial v_i}{\partial x} \tan \theta dx_i \right] \quad (6b)$$

式中: L_c 为大缆长度, $L_c = \int_0^L \frac{dx}{\cos \theta}$ (见文献[5-6]); q 为总恒载集度; H_q 为总的恒载水平缆力. 由于第 i 段大缆微段 ds_i 的应变能为

$$dV_{ce} = \left\{ \left[\frac{1}{2} H_q + \frac{1}{2} H(t) \right] \frac{ds}{dx} \right\} \Delta ds \quad (7)$$

式中: $H(t)$ 为惯性力引起的左侧或者右侧缆索水平缆力的增量, 后一个系数 1/2 是由于 $H(t)$ 从零增加至其最大值. 那么对式(7)积分, 并结合式(6a)和(6b)中和得缆索的应变能为

$$V_{ce} = \sum_{i=1}^3 \frac{L_i}{E_c A_{c1}} \left[\frac{1}{2} H_q (H_i + H_r) + \frac{1}{2} (H_i^2 + H_r^2) \right] \quad (8)$$

式中: H_l 和 H_r 分别由式(6a)和(6b)表达。

1.2 振动能

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \frac{q_c}{gA_s} \left[I_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 + I_z \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right)^2 + (I_y + I_z) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right)^2 + A_s \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + A_s \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + A_s \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \frac{q_c}{2g} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 \right] dx_i \quad (9)$$

式中: g 为重力加速度; q_s 和 q_c 分别为悬吊结构的恒载集度和缆索的恒载集度(两缆之和); A_s 、 I_y 和 I_z 分别为加劲梁的截面积、侧向挠曲惯性矩和竖向挠曲惯性矩。

2.3 加劲梁应变能 V_{∞}

考虑自锚式悬索桥加劲梁压弯耦合、竖向和横向弯曲影响、翘曲和剪切变形的影响加劲梁应变能为^[10]

$$V_{\infty} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[\int_0^{L_i} \beta E I_y J_w \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} \right)^2 dx_i + \int_0^{L_i} G J_i \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} \right)^2 dx_i + \int_0^{L_i} E I_z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx_i + \int_0^{L_i} E A_s \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx_i + \int_0^{L_i} N_s \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx_i + \int_0^{L_i} \mu G A_s \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx_i + \int_0^{L_i} E I_z \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx_i + \int_0^{L_i} \mu G A_s \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx_i \right] \quad (10)$$

式中: E 为加劲梁弹模; μ 为剪切影响系数; N_s 为加劲梁受到的轴向压力。式(10)中第1项为翘曲应变能;第2项为扭转应变能;第3、第4项为弯曲应变能;第5项为轴向压缩应变能;第6项为压弯耦合应变能;第7、第8项为剪切应变能。

1.4 重力势能 V_g

$$V_g = - \sum_{i=1}^3 \left[\int_0^{L_i} q_c v dx_i + \int_0^{L_i} \frac{1}{2} q_c (v_i + v_r) dx_i \right] \quad (11)$$

1.5 不完全广义势能泛函 Π 及其变分

将式(8~11)代入式(1)得到自锚悬索桥空间耦合振动问题的大位移不完全广义势能泛函

$$\Pi = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \frac{q_c}{gA_s} \left[I_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 + I_z \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right)^2 + (I_y + I_z) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right)^2 + A_s \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + A_s \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + A_s \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \frac{q_c}{2g} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 \right] dx_i \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \lambda f_i dx_i \right\} dt \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 \right] dx_i - \sum_{i=1}^3 \frac{L_i}{E_c A_{c1}} \left[1/2 H_q (H_l + H_r) + \frac{1}{2} (H_l^2 + H_r^2) \right] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[\int_0^{L_i} \beta E I_y J_w \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} \right)^2 dx_i + \int_0^{L_i} G J_i \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} \right)^2 dx_i + \int_0^{L_i} E I_z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx_i + \int_0^{L_i} E I_z \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx_i + \int_0^{L_i} E A_s \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx_i + \int_0^{L_i} N_s \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx_i + \int_0^{L_i} \mu G A_s \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx_i + \int_0^{L_i} \mu G A_s \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx_i \right] + \sum_{i=1}^3 \left[\int_0^{L_i} q_c v dx_i + \int_0^{L_i} \frac{1}{2} q_c (v_i + v_r) dx_i \right] - \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \lambda f_i dx_i \quad (12)$$

且左、右侧吊杆无延伸的约束条件为

$$f_l = \left(\frac{b}{2} \frac{\partial w}{\partial x} - u_l \right) + (w - d_h \gamma - w_l)^2 + \left(h + v + \frac{b \gamma}{2} - v_l \right) - h^2(x) = 0 \quad (13a)$$

$$f_r = \left(\frac{b}{2} \frac{\partial w}{\partial x} - u_r \right) + (w - d_h \gamma - w_r)^2 + \left(h + v + \frac{b \gamma}{2} - v_r \right) - h^2(x) = 0 \quad (13b)$$

式中: h 为吊杆长度,即吊杆膜的形函数; b 为桥宽(假定两侧缆索间距与加劲梁等宽); d_h 为加劲梁扭转中心距吊点的竖向高度,见图1(b)。

那么分别对泛函 Π 取关于 u 、 v 、 u_i 、 v_i 、 w_i 、 u_r 、 v_r 、 w_r 以及 λ_l 和 λ_r 的变分,并且联立(6a)、(6b),以及(13a)、(13b)两个约束条件,即得到自锚式悬索桥空间耦合自由振动的微分方程。篇幅所限,笔者仅讨论竖向和纵向自由振动微分方程的求解,将这些方程约去 Lagrange 乘子,得到自锚式悬索桥空间自由振动的纵向和竖向微分方程。即加劲梁纵向振动:

$$\frac{q_i}{g} u - E A_s \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu G A_s \left[\left(1 + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] - \frac{q_c}{2g} (\ddot{u}_r - \ddot{u}_l) - \left(\frac{1}{2} H_q + H_r \right) \times \left(1 + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \tan \theta \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{1}{2} H_q + H_l \right) \times \left(1 + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} + \frac{\partial v_l}{\partial x} \tan \theta \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (14)$$

加劲梁竖向振动:

$$\frac{q_i}{g} \ddot{v} - \frac{q_i}{g A_i} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + E I_i \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - N_i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \mu G A_i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + 1 \right) \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{q}{H_q} (H_l + H_r) + \frac{q_c}{2g} (\ddot{v}_l + \ddot{v}_r) - \left(\frac{1}{2} H_q + H_l \right) \left(1 + \frac{\partial u_l}{\partial x} \tan \theta \right) \frac{\partial^2 v_l}{\partial x^2} - \left(\frac{1}{2} H_q + H_r \right) \left(1 + \frac{\partial u_r}{\partial x} \tan \theta \right) \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} = 0 \quad (15)$$

虽然有了式(14)、(15),但这两个方程都是非线性的,并且所有位移量在空间均耦合,对它们的求解是非常困难.为了得到这些微分方程的解,可以考虑主要变形,即忽略非线性项、空间耦合项后对微分方程进行进一步研究.

2 微分方程的求解

当仅考虑自锚悬索桥纵向自由振动时 $u = u_i = u_r$, 并且 $H_l = H_r$, 不考虑剪切效应时,那么加劲梁纵向自由振动方程(14)简化为

$$\frac{q_i}{g} \ddot{u} - E A_i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (16)$$

式(16)为纵向位移的微分方程,即就是加劲梁纵向自由的振动微分方程.该方程有两个自变量,所以是偏微分方程,可通过“分离变量法”求解^[11].对于双塔三跨连续自锚悬索桥纵向自由振动频率求解为

$$\omega = \sqrt{\frac{E}{\rho_i}} \frac{2n}{L_i} \pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \infty \quad (17)$$

式中: L_i 为加劲梁长度; ρ_i 为加劲梁材料密度.

当仅考虑自锚悬索桥竖向自由振动时 $v = v_l = v_r$, 并且 $H_l = H_r = 1/2 H$. 忽略非线性项、剪切效应和耦合项后,加劲梁竖向自由振动微分方程(15)化简为

$$\frac{q}{g} \ddot{u} + E I_i \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - N_i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{q}{H_q} (H_l + H_r) - H_q \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (18)$$

自锚悬索桥 $N_i = H_q$, 则式(18)简化为

$$\frac{q}{g} \ddot{v} + E I_i \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - 2 H_q \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + H \frac{q}{H_q} = 0 \quad (19)$$

式(19)为竖向位移的微分方程,即是加劲梁竖向自由的振动微分方程.对于三跨连续的自锚式悬索桥,振动可分为对称和反对称振型,则求解方程(19)得到竖向自由振动频率计算公式:

(1) 对称竖向振动频率方程为

$$\frac{q f L}{\Phi^3 (Z^2 - 1) Z} \frac{\Phi}{Z \sqrt{2}} Z - \left[\frac{Z + 1}{\sqrt{Z - 1}} \tan \left(\frac{\Phi \sqrt{Z - 1}}{\sqrt{2}} \right) \right]$$

$$- \frac{Z + 1}{\sqrt{Z + 1}} \tanh \left(\frac{\Phi \sqrt{Z + 1}}{2} \right) + \frac{2 q_i f_i L_i}{\Phi_i^3 (Z_i^2 - 1) Z_i} \cdot \left[\frac{\Phi_i}{\sqrt{2}} Z_i - \frac{Z_i + 1}{\sqrt{Z_i - 1}} \tan \left(\frac{\Phi_i \sqrt{Z_i - 1}}{\sqrt{2}} \right) - \frac{Z_i - 1}{\sqrt{Z_i + 1}} \times \tanh \left(\frac{\Phi_i \sqrt{Z_i + 1}}{2} \right) \right] - \frac{L_c}{E_c A_c} \frac{H_q}{8 \sqrt{2}} = 0 \quad (20)$$

式中: $\Phi^2 = \frac{H_q L^2}{E I_i}$; $Z = \sqrt{1 + \frac{8 f \omega^2}{\Phi^2 g}}$; $\Phi_i^2 = \frac{H_q L_i^2}{E I_{i_r}}$; $Z_i = \sqrt{1 + \frac{8 f_i \omega^2}{\Phi_i^2 g}}$; L 为中跨加劲梁长度; I_i 为中跨加劲梁竖向惯性矩; f 为中跨矢跨比; 下脚标表示边跨的.

(2) 反对称竖向振动频率

$$\omega = \frac{2 n \pi}{L} \sqrt{\frac{g}{q} \left(2 H_q + \frac{(2 n)^2 \pi^2 E I_i}{L^2} \right)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

3 算例验证

为了验证式子(19)~(21)的准确性,下面通过两座自锚悬索桥固有周期的有限元解与上述公式所得结果进行比较.两个算例为:大连金石滩金湾桥(24 + 60 + 24 m 混凝土自锚式悬索桥);浙江绍兴滨海桥(77.8 + 188 + 77.8 m 钢箱自锚式悬索桥),有限元解和解析解对比见表1.

表1 周期的解析解与有限元解对比
Tab.1 Periods comparison of analytic results and FEA results

算例	方法	纵向自由 振动/s	竖向自由振动/s	
			对称	反对称
金 湾 桥	本文解析法	0.872 558	0.575 427	0.445 973
	有限元数值法	0.963 212	0.632 704	0.456 027
	误差/%	9.41	9.05	2.20
滨 海 桥	本文解析法	2.121 07	1.537 824	0.869 872
	有限元数值法 ^[12]	2.345 66	1.696 483	0.899 697
	误差/%	9.57	9.35	3.31

注:误差 = (数值法 - 解析法) / 数值法 × 100%

从表1中两个算例的解析解和有限元解对比可以看出,利用本文给出解析公式求解自锚式悬索桥基本周期是可行的;同时可以看出,由于微分方程求解的简化,解析法较有限元数值法求得的基本周期小.

4 小结

通过以上推导和分析,当忽略空间耦合、剪切等影响后,竖向、纵向振动微分方程得以简化,最

终方程中不包括与大缆倾角相关的项,有以下结论:

(1) 由表1可以看出有限元和解析解计算的固有周期误差在2.20% ~ 9.57%之间,这说明本文所推导的公式可以用来计算三跨连续自锚式悬索桥纵向和竖向振动基本周期,所推导解析公式基本正确。

(2) 解析法得到桥梁结构基本周期较有限元数值法小,这是由于解析法忽略了剪切和其它耦合效应,相当于结构约束加强,所以求得基本周期普遍小于数值法结果。

(3) 三跨连续自锚式悬索桥纵向自由振动频率与加劲梁长度(即桥梁跨径)、加劲梁材料密度的开方成反比,与加劲梁材料的弹性模量的开方成正比。

感谢西南交通大学郑凯锋教授对本文指导!

参考文献:

- [1] 许琪楼,王仁义,常少英. 四边支承矩形板自由振动的精确解法[J]. 郑州工业大学学报,2001,22(1):1-5.
- [2] 许琪楼,许 蕾. 三边支承一边自由矩形板自由振动分析[J]. 郑州大学学报:工学版,2003,24(1):5-10.
- [3] 李国豪. 桥梁结构稳定与振动[M]. 修订版. 北京:中国铁道出版社,2002:375-383.
- [4] 小西一郎. 钢桥[M]. 第五册. 戴振藩,译. 北京:中国铁道出版社,1981:71-84.
- [5] 陈仁福. 大跨度悬索桥理论[M]. 成都:西南交通大学出版社,1994:73-78.
- [6] Abdel - Ghaffar A M. Free lateral vibration of suspension bridge[J]. ASCE, 1978,104(ST3):503-508.
- [7] 张宏斌,孔宪京,张 哲,等. 自锚式悬索桥动力特性[J]. 公路交通科技,2004,21(7):66-69.
- [8] 丰 硕,项贻强,谢 旭,等. 自锚式悬索桥动力特性及结构参数影响规律研究[J]. 世界桥梁,2004(4):50-53.
- [9] 刘春城. 混凝土自锚式悬索桥三维地震反应研究[D]. 大连:大连理工大学桥梁研究所,2003:19-32.
- [10] 刘春城,张 哲,石 磊. 压弯耦合效应下自锚式悬索桥自由振动研究[J]. 哈尔滨工业大学学报,2004,36(1):109-111.
- [11] 林家浩,屈乃泗,孙焕纯. 计算结构动力学[M]. 北京:高等教育出版社,1989:76-113.
- [12] 戴晓春. 自锚式悬索桥计算分析研究[D]. 成都:西南交通大学土木工程学院,2005:61-67.

Study on Self - anchored Suspension Bridges Free Vibrations

LI Jie, LI Na

(School of Civil Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: The study of the character istics of suspensions free vibrations is basic to the analysis of shock resistance, wind resistance and so on. Considering the effect of coupling of flexural and axial action, big cable tilt angle and cable longitudinal displacement, based on functional analysis, and by applying the variation method, this paper draws free vibrations differential equation of double towers and three continuous spans self - anchored suspension bridges. According to simplistic differential equation, the paper establishes the formula which can calculate self - anchored longitudinal vibration and vertical vibration frequency. Finally, through tow examples to check the formulas, they are proved right.

Key words: self - anchored suspension, bridge; free vibration; functional analysis; frequency formula