

文章编号:1671-6833(2008)03-0122-04

薄壁箱梁振动时的剪力滞效应

刘健新, 马麟, 胡庆安

(长安大学 风洞实验室, 陕西 西安 710064)

摘 要: 提出了薄壁箱梁强迫振动剪力滞效应分析的理论方法. 用变分原理推导了考虑剪力滞效应的箱梁强迫振动时的微分方程、边界条件, 建立了方程解的差分格式, 论证了差分格式的稳定性、收敛性, 并用 Matlab 编程实现. 在数值求解时由于梁的竖向位移和反映剪力滞的翼板纵向最大位移差函数之间存在耦合, 有限元法中必要的假设形函数反映不出耦合关系, 所以采用了适应性更强的有限差分法. 结果表明, 薄壁箱梁振动时剪力滞效应是明显的, 使跨中位移响应和上翼板与腹板交接处应力响应幅值明显增大.

关键词: 箱梁; 剪力滞后; 振动; 变分; 差分法

中图分类号: U 441.3; U 448.21.3 **文献标识码:** A

0 引言

剪力滞后现象在公路桥梁中是很受关注的力学问题. 静载作用下薄壁箱梁剪力滞后效应的分析已经比较完善, 并应用于实际工程, 但在桥梁振动分析中, 剪力滞效应影响的研究还很少.

文献[1-2]用解析的方法研究了剪力滞效应对简支箱梁、连续箱梁自振特性的影响, 得出剪力滞效应使梁的动力刚度有较大降低, 固有频率计算值减小的结论. 但其的方法仅限于研究自振特性, 不便应用到强迫振动, 难以解决实际工程问题. 本文试研究剪力滞效应对薄壁箱梁振动的影响, 提供任意荷载时程作用下的差分解.

1 振动控制微分方程

本小节首先用哈密顿原理推导考虑剪力滞后效应的箱梁振动控制微分方程、边界条件、初时条件. 箱梁的截面示意图如图1所示. 用 $w(x, t)$ 和 $u_i(x, y, t)$ 分别表示箱梁的竖向位移和上下翼板的纵向位移, 并假定:

$$u_i(x, y, t) = Z_i \left\{ \frac{dw(x, t)}{dx} + \left[\left(1 - \frac{y^3}{(b_i)^3} \right) u'(x, t) \right] \right\} \quad (i=1, 2, 3) \quad (1)$$

式中: $u(x, t)$ 为翼板最大纵向位移差函数; Z_i 为翼板跨形心的距离. 考虑剪力滞时截面上下翼板法向应力为:

$$\sigma_i = \frac{\partial u_i}{\partial x} = EZ_i \left\{ w''(x, t) + \left[\left(1 - \frac{y^3}{(b_i)^3} \right) u'(x, t) \right] \right\} \quad (i=1, 2, 3) \quad (2)$$

1.1 振动系统的各项能量

1.1.1 箱梁应变能

上、下翼板和腹板的应变能之和为:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI w'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EI_s \left(\frac{3}{2} w'' u' + \frac{9}{14} u'^2 \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{9G}{5b^2} I_{s1} u'^2 dx \quad (3)$$

式中: 第一项为腹板的应变能, 第二、三项为考虑剪力滞效应时翼板应变能, 且:

$$\begin{cases} I = I_s + I_w, I_s = I_{s1} + I_{s2} + I_{s3} \\ I_{s1} = \left(\frac{I_{s11}}{b_1^2} + \frac{I_{s22}}{b_2^2} + \frac{I_{s33}}{b_3^2} \right) \times b^2 \\ I_{s11} = 2t_1 b_1 Z_1^2, I_{s22} = 2t_2 b_2 Z_2^2 \\ I_{s33} = 2t_3 b_3 Z_3^2 \end{cases} \quad (4)$$

其中, I_w 为截面惯性矩, 其他各符号的含义同文献[3].

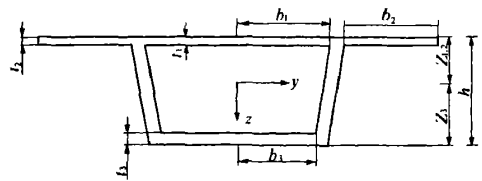


图1 薄壁箱梁示意图

Fig. 1 Cross-section of thin-wall box-girder

收稿日期: 2008-05-08; 修订日期: 2008-07-01

作者简介: 刘健新(1942-), 男, 山西清徐人, 长安大学教授, 博士生导师, 主要从事桥梁抗风及抗振研究, E-mail:

LJX@gl.chd.edu.cn.

1.1.2 箱梁的动能

仅考虑竖向振动动能:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m(x, t) \dot{w}(x, t)^2 dx \quad (5)$$

式中: \dot{w} 表示 w 对时间 t 的导数; $m(x, t)$ 表示质量线密度.

1.1.3 外荷载所做的功

$$W = \int_0^l p(x, t) w(x, t) dx \quad (6)$$

式中: $p(x, t)$ 表示荷载线密度.

1.2 方程推导

由哈密尔顿原理^[4-5]:

$$\delta \int_0^l (T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (7)$$

将式(1)、(3)、(5)、(6)代入式(7),由变分原理,可以得到振动控制方程、边界条件、初始条件.

控制方程:

$$m\ddot{w} + (EIw'')'' + \frac{3}{4}(EI_n u')'' = p(x, t) \quad (8)$$

$$\frac{9}{5} \frac{GI_n}{b^2} u - \frac{9}{14}(EI_n u')' - \frac{3}{4}(EI_n w'')' = 0 \quad (9)$$

边界条件:

$$\begin{cases} \left[(EIw'')' + \frac{3}{4}(EI_n u')' \right] \delta w \Big|_{x=0, l} = 0 \\ \left[EIw'' + \frac{3}{4}EI_n u' \right] \delta w' \Big|_{x=0, l} = 0 \\ \left[\frac{3}{4}EI_n w'' + \frac{9}{14}EI_n u' \right] \delta u' \Big|_{x=0, l} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

当两端边界条件都是简支时,式(10)变为:

$$\begin{cases} \delta w' \Big|_{x=0, l} = 0 \\ \left[EIw'' + \frac{3}{4}EI_n u' \right] \Big|_{x=0, l} = 0 \\ \left[\frac{3}{4}EI_n w'' + \frac{9}{14}EI_n u' \right] \Big|_{x=0, l} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

初始条件:

$$w(x, t) = w^*(x) \quad (12)$$

$$w'(x, t) = w'^*(x) \quad (13)$$

式(12)~(13)中的 $w^*(x)$ 、 $w'^*(x)$ 为箱梁初始位移和速度.

2 方程的差分法

显然,方程式(8)~(13)难以找到解析解.又由于 $w(x)$ 和 $u(x)$ 存在耦合,若用有限单元法来找数值解,则假设的形函数难以反映 $w(x)$ 和 $u(x)$ 的耦合关系,文献[6-7]在得到剪力滞、剪切变形双重效应影响下微分方程初参数解的基础上,推导出了单元刚度矩阵,能够精确地反映 $w(x)$ 和 $u(x)$ 的耦合关系.但是,这是针对静载作

用下剪力滞效应分析的.在本文中,由于 $m\ddot{w}$ 的存在,难以用初参数法找有限单元法的刚度矩阵和质量矩阵.

差分法是解特殊方程的有效方法,笔者用差分法计算方程式(8)~(13)的数值解.

2.1 差分格式

设求解区域为 $\sigma = \{(x, t) | 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$, 其中 l 为梁长, T 为求解终止时间.在求解区域作等距的矩形网格,时间步长为 τ ,空间步长为 h ,则:

$$x_j = jh \quad (j=0, 1, 2, \dots, J) \quad (14)$$

$$t_n = n\tau \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad (15)$$

式中: $J = l/h$, $N = T/\tau$. 并令

$$w_j^n = w(x_j, t_n) \quad (16)$$

$$u_j^n = u(x_j, t_n) \quad (17)$$

在方程式(8)~(9)以差分代微分,可得差分方程为:

$$w_j^{n+1} = 2w_j^n - w_j^{n-1} - \lambda [I_{j+2}w_{j+2}^n - 2(I_{j+1} + I_j)w_{j+1}^n] - \lambda [(I_{j+1} + 4I_j + I_{j-1})w_j^n - 2(I_j + I_{j-1})w_{j-1}^n - I_{j-1}w_{j-2}^n]$$

$$- \frac{3}{4}h\lambda [I_{j+1}u_{j+2}^n - (I_{j+1} + 2I_j)u_{j+1}^n] -$$

$$\frac{3}{4}h\lambda [(2I_j + I_{j-1})u_j^n - I_{j-1}u_{j-1}^n] + \frac{p_j^n \tau^2}{m}$$

$$(j=1, 2, \dots, J-1; n=2, 3, \dots, N) \quad (18)$$

$$\frac{9}{5} \frac{Gh^4}{Eb^2} I_{j+1}u_j^n - \frac{9}{14}h[I_{j+1}u_{j+1}^n - (I_{j+1} + I_j)u_j^n + I_ju_{j-1}^n] -$$

$$\frac{3}{4}[I_{j+1}w_{j+2}^n - (2I_{j+1} + I_j)w_{j+1}^n + (I_{j+1} + 2I_j)w_j^n - I_jw_{j-1}^n] = 0$$

$$(j=1, 2, \dots, J-1; n=2, 3, \dots, N) \quad (20)$$

由式(11),可得简支时边界条件的离散形式为:

$$w_0^n = 0 \quad (21)$$

$$w_J^n = 0 \quad (22)$$

$$I_0(w_1^n - 2w_0^n + w_{-1}^n) + \frac{3}{4}hI_{n_0}(u_1^n - u_0^n) = 0$$

$$(n=1, 2, \dots, N) \quad (23)$$

$$I_j(w_{j+1}^n - 2w_j^n + w_{j-1}^n) + \frac{3}{4}hI_{j+1}(u_j^n - u_{j-1}^n) = 0$$

$$(n=1, 2, \dots, N) \quad (24)$$

$$\frac{3}{4}I_{n_0}(w_1^n - 2w_0^n + w_{-1}^n) + \frac{9}{14}hI_{n_0}(u_1^n - u_0^n) = 0$$

$$(n=1, 2, \dots, N) \quad (25)$$

$$\frac{3}{4}I_{j+1}(w_{j+1}^n - 2w_j^n + w_{j-1}^n) + \frac{9}{14}hI_{j+1}(u_j^n - u_{j-1}^n) = 0$$

$$(n=1, 2, \dots, N) \quad (26)$$

初始条件的离散形式为:

$$w_j^1 = w^*(x_j) \quad (27)$$

$$\frac{w_j^2 - w_j^1}{\tau} = w'^*(x_j) \quad (28)$$

式(18)中: $\lambda = E\tau^2/(mh^4)$.

2.2 求解步骤

令 $W^n = \{w_{-1}^n, w_0^n, w_1^n, \dots, w_j^n, w_{j+1}^n\}^T$,

$U^n = \{u_0^n, u_1^n, \dots, u_{j-1}^n, u_j^n\}^T$ 已知 W^n, U^n 时, 求解 W^{n+1}, U^{n+1} 的步骤如下:

(1) 由式(18)求解 $w_1^{n+1}, w_2^{n+1}, \dots, w_{j-1}^{n+1}$;

(2) 由式(21)、(23)求 w_0^{n+1}, w_j^{n+1} ;

(3) 由式(20)、(23)~(26)求解 $w_{-1}^{n+1}, w_{j+1}^{n+1}$ 及 U^{n+1} .

在步骤(3)中有 $J+1$ 个变量, 式(20)、(23)~(28)有 $J+1$ 个方程.

笔者基于以上过程编写了 Matlab 程序, 程序计算结果见第3小节.

2.3 差分稳定性和收敛性探讨

先用 Fourier 方法^[8]讨论下式所示差分格式的稳定性.

$$w_j^{n+1} = 2w_j^n - w_j^{n-1} -$$

$$\lambda(w_{j+2}^n - 4w_{j+1}^n + 6w_j^n - 4w_{j-1}^n + w_{j-2}^n) \quad (29)$$

由推导过程可知: 式(29)是不考虑剪力滞的箱梁振动差分格式.

这是一个三层差分方程, 先化为等价的二层差分方程组:

$$\begin{cases} w_j^{n+1} = 2w_j^n - w_j^{n-1} - \lambda(w_{j+2}^n - 4w_{j+1}^n + 6w_j^n - 4w_{j-1}^n + w_{j-2}^n) \\ v_j^n = w_j^{n-1} \end{cases} \quad (30)$$

令 $U_j^n = \{w_j^n, v_j^n\}^T$, 上式可以写成矩阵的形式:

$$U_j^{n+1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} U_j^n + \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (U_{j+2}^n + U_{j-2}^n) + \begin{bmatrix} 4\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (U_{j+1}^n + U_{j-1}^n) + \begin{bmatrix} -6\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_j^n \quad (31)$$

在式(31)两端作 Fourier 积分, 可得差分格式的増长因子为:

$$G(\tau k) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (e^{2khi} + e^{-2khi}) + \begin{bmatrix} 4\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (e^{khi} + e^{-khi}) + \begin{bmatrix} -6\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 16\lambda \sin^4(kh/2) & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (-\infty < k < \infty) \quad (32)$$

由 Von Neumann 判别准则, 式(29)的差分方程稳定的条件是当 $\tau \leq \tau_0$ 时, 对所有的 $k \in \mathbb{R}$ 有:

$$\rho(G(\tau, k)) \leq 1 + M\tau \quad (33)$$

式(32)中的 $\rho(G(\tau, k))$ 为 $G(\tau, k)$ 的谱半径, M 为常数. 下面证明式(32)在 τ 足够小时条件成立. 当 h 一定时, 取足够小的 τ , 则 $\alpha = 16\lambda$

$\sin^2(kh/2) \leq 16\lambda$ 为足够小的正数, 使得:

$$\rho(G(\tau, k)) = \left| 1 - \frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha} \right| = \left| 1 - \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{4\alpha - \alpha^2} \right| = \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \frac{(4\alpha - \alpha^2)}{4}} = 1 \leq 1 + M\tau.$$

所以, 式(29)所示差分方程稳定.

对于式(18)~(28)的差分格式, 其稳定性的关键是式(18)的稳定性. 可将式(18)中的 $u_{i-1}^n, u_j^n, \dots, u_{j+2}^n$ 表达为 $w_{-1}^n, w_0^n, \dots, w_{j+1}^n$ 的线性组合, 由以上相同的过程可推知式(18)的稳定性. 并且对于式(18)~(28)这样的线性差分格式, 其差分格式的稳定性是其收敛性的充要条件, 所以式(18)~(28)的差分格式也是收敛的.

3 算例

将翼板与腹板交接处的剪力滞系数定义为:

$$\lambda^* = \frac{\text{考虑剪力滞效应时的应力最大值 } \sigma_{\max}}{\text{不考虑剪力滞时的应力最大值 } \sigma_{\max}^*}$$

一简支箱梁截面如图2所示, 跨径是 30 m, 弹性模量 $E = 3.5 \text{ MPa}$, 材料密度 $\rho = 2.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. 给定的初始条件是: $w^*(x) = 0 (0 \leq x \leq l)$, $w'^*(x) = 0 (0 < x < l)$. 荷载是突加均布荷载, 荷载密度 $p = 500 \text{ kN/m}$, 计算 $t = 0 \sim 2 \text{ s}$ 时的位移和应力时程, 并计算剪力滞系数. 取 $\tau = 0.0003 \text{ s}$, $h = 2 \text{ m}$, 计算结果如表1、2和图3所示.

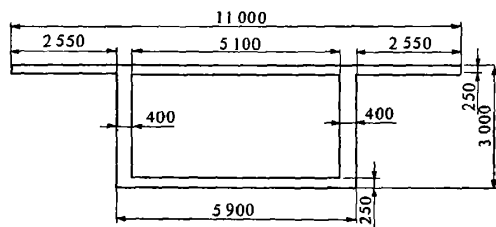


图2 截面尺寸(单位:mm)

Fig. 2 Size of cross-section (Unit:mm)

表1 跨中竖向位移响应最大值

Tab. 1 the maximum value of vertical displacement response of mid-span

| 方法 | 考虑剪力滞 | 不考虑剪力滞 |
|---------|----------|----------|
| 最大位移/mm | 36.387 7 | 31.790 0 |

表2 跨中截面上缘翼板与腹板交接处应力响应最大值

Tab. 2 the maximum value of stress response at intersection point of top wing Plate and web plate of mid-span

| 方法 | 考虑剪力滞 | 不考虑剪力滞 |
|-----------|-----------|-----------|
| 应力最小值/MPa | -14.483 3 | -12.584 1 |

跨中截面翼板与腹板交接处剪力滞系数 λ^* 为: $14.4833/12.5841 = 1.1509$. 可见, 在薄壁箱梁振动时剪力滞效应现象不可忽视.

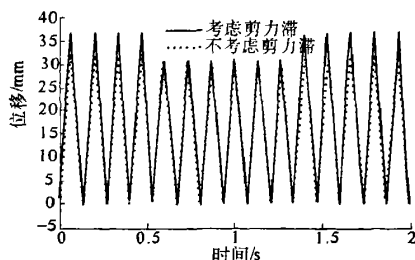


图3 跨中截面位移时程

Fig.3 Vertical displacement response of mid-span

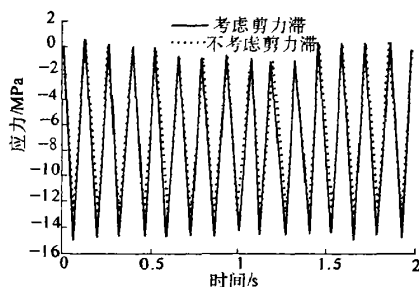


图4 跨中截面上缘翼板与腹板交接处应力时程

Fig.4 Stress response of intersection point of top wing plate and web plate of mid-span

4 结论

(1) 笔者用变分原理推导了考虑剪力滞效应的箱梁振动微分方程、边界条件, 建立了方程解的

差分格式, 论证了差分格式的稳定性、收敛性, 最后编写了相应计算程序, 为箱梁在外荷载作用下发生强迫振动时剪力滞效应的考虑提供了可能.

(2) 计算结果表明在薄壁箱梁振动时剪力滞效应使跨中位移时程和上缘翼板与腹板交接处应力时程的幅值明显增大, 剪力滞系数 1.15, 不容忽视.

参考文献:

- [1] 甘亚南, 吴亚平, 王根会, 等. 剪力滞效应对简支箱梁自振特性的影响研究[J]. 兰州铁道学院学报: 自然科学版, 2002, 21(3): 23-25.
- [2] 甘亚南, 王根会, 吴亚平. 剪力滞效应对连续箱梁自振特性的影响研究[J]. 兰州铁道学院学报: 自然科学版, 2003, 22(3): 41-43.
- [3] 张士铎, 邓小华, 王文州. 箱形薄壁梁剪力滞效应[M]. 北京: 人民交通出版社, 1998.
- [4] 宋一凡. 公路桥梁动力学[M]. 北京: 人民交通出版社, 2000.
- [5] DYM C L, SHAMES I H. 固体力学变分法[M]. 袁祖贻, 译, 北京: 中国铁道出版社, 1998.
- [6] 刘世忠, 吴亚平, 夏旻, 等. 薄壁箱梁剪力滞剪切变形双重效应分析的矩阵方法[J]. 工程力学, 2001, 18(4): 140-145.
- [7] 刘世忠, 欧阳永金, 呈亚平, 等. 变截面薄壁箱梁剪力滞剪切变形分析[J]. 中国公路学报, 2002, 15(3): 61-63.
- [8] 陆金甫, 关治. 偏微分方程数值解法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.

The Research of Analysis Method of Shear Lag's Effect on Forced Vibration of Thin-wall Box-girder

LIU Jian-xin, MA Lin, HU Qing-an

(Wind Tunnel Laboratory, Chang'an University, Xi'an 710064, Shanxi, China)

Abstract: The method of the analysis of shear lag's effect on the forced vibration of thin-wall box-girder are put forward. Box-girder's vibration differential equations are deduced with calculus of variation, which considers shear lag's effect and boundary conditions. Difference schemes of the equations are set up, and stability and convergence of them are further testified. The method is achieved through Matlab programming. There is the couple relation between beam's vertical displacement and maximum longitudinal displacement difference function of beam's wing plate. Because assumed shape function necessary to the finite element method can not reflect the couple relation, the finite difference method, which is capable of adapting to complicated equation, is adopted in mathematical solution. The results show that shear lag's effect on the vibration of thin-wall box-girder is obvious, which makes vertical deflection response and stress response of top wing plate and web plate at mid-span larger.

Key words: box-girder; shear lag; vibration; calculus of variation; calculus of differences