

三维热弹性接触问题的互补方程及有限元解法

肖似蹊¹, 肖友刚², 雷先明¹, 时 或¹

(1. 邵阳学院 机械能源工程系, 湖南 邵阳 422004; 2. 中南大学 交通运输工程学院, 湖南 长沙 410075)

摘 要: 通过定义接触面滑动屈服函数和流动势函数, 得出了热接触边界的互补方程. 基于虚功原理和接触单元技术, 推导了热应力作用下三维弹性接触问题的有限元方程, 在该方程中引入了接触伪荷载, 以反映接触状态变化对荷载项的影响. 在迭代求解过程中采取每作两次迭代进行一次加速的策略, 显著提高了求解效率.

关键词: 热弹性; 接触问题; 互补方程; 有限元解法

中图分类号: O 343.3; O 343.6

文献标识码: A

0 引言

热接触问题的接触状态随温度分布和变形状态而改变, 在热接触下进行热力学分析必须考虑热与可移动接触边界间的耦合作用. Johansson L^[1]较早用有限元法对热接触问题进行了系统研究, 并给出热接触问题模型的数学描述; Wriggers P^[2]给出热摩擦接触问题的有限元求解模型, 所采用的计算方法是对两类问题均采用迭代分析技术进行求解; Jun Park^[3]对热接触面给出了以热流与温度差为变量的互补关系, 以互补关系进行热接触问题的求解; 张洪武^[4]基于时域的逐步温度增量分析与参变量变分原理的二次规划算法进行了热与接触问题两类问题的求解; 李润方^[5]把瞬态温度场分析和弹塑性接触分析耦合, 用混合法进行热接触迭代, 提出了一种瞬态耦合热弹塑性接触有限元分析方法. 笔者在推导热接触边界互补方程的基础上, 建立了三维热接触问题的有限元方程, 在该方程中引入了接触间隙伪荷载, 以反映接触状态变化对荷载项的影响, 并制定了热接触边界的加速求解策略, 大大提高了计算效率.

1 三维热弹性接触问题的互补方程

当两接触体 Ω_A, Ω_B 有相对滑动趋势时, 接触表面就有摩擦力产生, 且满足 Coulomb 定律. 在可能接触边界 $\Gamma_c^{(\beta)}$ (上标 $\beta = A, B$, 下标 c 表示接

触), 假定当前状态下的位移为 $u_c = [u_i^{(\beta)} \quad u_n^{(\beta)}]^T$, $u_i^{(\beta)}, u_n^{(\beta)}$ 为两接触体的切向位移在 s, t 方向的两个分量, $u_n^{(\beta)}$ 为两接触体的法向位移; 接触力为 $R_c = [R_t \quad R_n]^T$, R_t, R_n 为切向摩擦力在 s, t 方向的两个分量, R_n 为法向力, $R_n \leq 0$, 两接触体间的接触间隙为 δ_n , 下标 n, s, t 分别代表接触面局部坐标系 nst 中的 3 个坐标方向. 定义接触面滑动屈服函数 Φ 和流动势函数 g :

$$\Phi = \begin{cases} R_t^2 + R_n^2 - \mu^2 R_n^2 \leq 0 & (\text{对于切向}) \\ R_n \leq 0 & (\text{对于法向}) \end{cases} \quad (1)$$
$$g = \begin{cases} R_t^2 + R_n^2 & (\text{对于切向}) \\ R_n & (\text{对于法向}) \end{cases}$$

式中: μ 为摩擦系数.

以接触压力为轴, 建立接触压力空间坐标系, 易知滑动屈服面在可能接触边界 $\Gamma_c^{(\beta)}$ 上, 形状为圆锥面, 圆锥顶角为摩擦角. 接触压力只能位于圆锥面内或圆锥面上, 而不能位于圆锥面外. 对圆锥面逐次线性化, 得到一个分片近似线性滑动摩擦锥, 如图 1 所示.

滑动屈服函数 Φ 和流动势函数 g 转化为:

$$\begin{cases} \Phi_i = [\cos \alpha_i, \sin \alpha_i, \mu] [R_t, R_n]^T \\ i = 1, 2, \dots, N \\ g_i = [\cos \alpha_i, \sin \alpha_i] [R_t, R_n]^T \\ \Phi_{N+1} = R_n \leq 0 \\ g_{N+1} = R_n \end{cases} \quad (2)$$

式中: N 为圆周等分数; α_i 为摩擦力方向角.

收稿日期: 2008-07-20; 修订日期: 2008-08-18

基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目(07JJ6083); 湖南省教育厅科研计划资助项目(06C758)

作者简介: 肖似蹊(1965-), 男, 湖南隆回人, 邵阳学院讲师, 研究方向: 机械设计及理论.

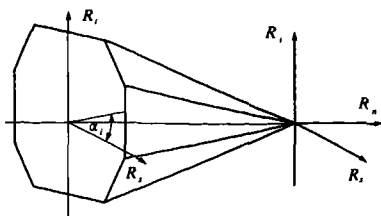


图1 接触压力空间屈服面线性近似

Fig.1 Linear approximation of yield surface of contact pressure space

在载荷增量作用后,假设接触体相应的位移增量和接触力增量分别为 $du_c = [du_i^{(\beta)} \quad du_n^{(\beta)}]^T$, $dR_c = [dR_t \quad dR_n]^T$, 则接触相对位移 $d\epsilon_c$ 为:

$$d\epsilon_c = [d\epsilon_t^A \quad d\epsilon_t^S \quad d\epsilon_n^A]^T = [du_t^A \quad du_t^S \quad du_n^A]^T - [du_t^B \quad du_t^S \quad du_n^B]^T + [0 \quad 0 \quad \delta_n]^T \quad (3)$$

把 $d\epsilon_c$ 分解成弹性相对位移增量 $d\epsilon_c^e$ 和滑动相对位移增量 $d\epsilon_c^s$ 两部分^[6], 则:

$$d\epsilon_c = d\epsilon_c^e + d\epsilon_c^s \quad (4)$$

接触力增量 dR_c 与弹性相对位移 $d\epsilon_c^e$ 增量的关系为:

$$dR_c = D_c d\epsilon_c^e = D_c (d\epsilon_c - d\epsilon_c^s) \quad (5)$$

式中: $d\epsilon_c^s = (\partial g / \partial R_c) \lambda$, $g = [g_1 \quad g_2 \cdots g_{N+1}]^T$, $\partial g / \partial R_c$ 代表相对滑移方向, $\lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \cdots \lambda_{N+1}]^T$, 为滑移参量. $D_c = \text{diag}(E \quad E \quad E)$, D_c 为接触面弹性矩阵, E 为罚因子.

将接触边界条件用滑动屈服函数和滑移参量表示,得接触边界的互补方程:

$$\Phi_i \lambda_i = 0, \lambda_i \geq 0, \Phi_i \leq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, N+1) \quad (6)$$

因而,三维热接触耦合问题可用数学表达式描述为:

平衡方程

$$d\sigma_{ij} + db_i = 0 \quad (7)$$

几何方程

$$d\epsilon_{ij} = (du_{i,j} + du_{j,i})/2 \quad (8)$$

本构方程

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl} (d\epsilon_{kl} - \beta_{kl} dT) \quad (9)$$

在 $\Gamma_u^{(\beta)}$ 上的位移满足边界条件:

$$du_i^{(\beta)} = d\bar{u}_i^{(\beta)} \quad (10)$$

在 $\Gamma_p^{(\beta)}$ 上的力满足边界条件:

$$d\sigma_{ij}^{(\beta)} n_j^{(\beta)} = d\bar{P}_i^{(\beta)} \quad (11)$$

在 $\Gamma_c^{(\beta)}$ 上满足接触边界条件:

$$\begin{cases} dR_c = D_c [d\epsilon_c - (\partial g / \partial R_c) \lambda] \\ \Phi_i + v_i = 0 \\ v_i \lambda_i = 0, \\ \lambda_i \geq 0, v_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, N+1) \end{cases} \quad (12)$$

式中: $d\sigma_{ij}$ 为应力梯度增量; db_i 为体积力增量; $d\sigma_{ij}$, $d\epsilon_{ij}$ 分别为应力增量和应变增量; $du_{i,j}$ 为位移梯度增量; D_{ijkl} 为弹性系数; β_{kl} 为热膨胀系数; dT 为温度增量,根据传热边界条件^[4]及接触传热的有限元方程^[5]确定; du_i 为位移增量; $d\bar{u}_i$, $d\bar{P}_i$ 分别为给定的位移和面力增量; n 为边界外法线方向; v 为松弛变量.

2 三维热弹性接触问题有限元解法

2.1 热应力作用下三维弹性接触系统有限元方程

设有虚位移 ϑdu_i , 在 Γ_u 上满足 $\vartheta du_i = 0$, 将它与式(7)相乘并在区域 Ω 内积分,有

$$\int_{\Omega^A + \Omega^B} d\sigma_{ij} \vartheta du_i d\Omega + \int_{\Omega^A + \Omega^B} db_i \vartheta du_i d\Omega = 0 \quad (13)$$

由 Green 定理:

$$\int_{\Omega^A + \Omega^B} d\sigma_{ij} \vartheta du_i d\Omega = \int_{\Gamma^A + \Gamma^B} d\sigma_{ij} n_j \vartheta du_i d\Gamma - \int_{\Omega^A + \Omega^B} d\sigma_{ij} \vartheta du_{i,j} d\Omega \quad (14)$$

式中: Γ 包括接触边界 Γ_c , 指定位移边界 Γ_u 和指定力边界 Γ_p .

将式(14)代入式(13),并考虑在 Γ_u 上 $\vartheta du_i = 0$, 在 Γ_p 上 $d\sigma_{ij} n_j = d\bar{P}_i$, 得:

$$\int_{\Omega^A + \Omega^B} d\sigma_{ij} \vartheta du_{i,j} d\Omega = - \int_{\Gamma_c} dR_c \vartheta du_i d\Gamma + \int_{\Gamma_p^A + \Gamma_p^B} d\bar{P}_i \vartheta du_i d\Gamma + \int_{\Omega^A + \Omega^B} db_i \vartheta du_i d\Omega \quad (15)$$

将式(15)代入式(14),得:

$$\int_{\Omega^A + \Omega^B} D_{ijkl} (d\epsilon_{kl} - \beta_{kl} dT) \vartheta du_{i,j} d\Omega + \int_{\Gamma_c} D_c d\epsilon_{ci}^e \vartheta du_i d\Gamma = \int_{\Gamma_c} D_c (\partial g_i / \partial R_c) \lambda_i \vartheta du_i d\Gamma + \int_{\Gamma_p^A + \Gamma_p^B} d\bar{P}_i \vartheta du_i d\Gamma + \int_{\Omega^A + \Omega^B} db_i \vartheta du_i d\Omega \quad (16)$$

求解热弹性接触问题应该是在式(12)的约束下求解式(16). 将区域 Ω 用八节点等参单元离散,在可能接触区覆盖上八节点接触单元^[8],接触单元的几何形状与基体基本单元形状一致,节点与基体单元表面的节点相同. 设单元总数为 n_e , 接触单元总数为 n_c , 自由度数为 n_u .

根据第 j 个节点位移 \bar{u}^j 和单元应变 ϵ^j 、接触节点对的相对位移 \bar{u}_c^j 和接触单元的相对位移 ϵ_c^j 的关系,有:

$$\begin{aligned} \epsilon^j &= B^j \bar{u}^j \\ \epsilon_c^j &= N_c^j (\bar{u}_c^j + \delta_c^j) \end{aligned} \quad (17)$$

式中: B^j 为应变矩阵, N_c^j 为接触单元的形函数矩阵, $\delta_c^j = [0 \ 0 \ \delta_n^j]$.

引入单元位移向量 u^j 及接触单元位移向量 u_c^j , 总体位移向量 u 的转换矩阵 T_c^j, T_c^j , 可得:

$$u^j = T_c^j u \quad u_c^j = T_c^j u \quad (18)$$

将式(17)~(18)代入式(16), 并将相关参数以增量形式表示, 得接触有限元方程:

$$\begin{cases} Kdu = H\lambda + dP \\ dP = \sum_{j=1}^{n_c} dP_p^j - \sum_{j=1}^{n_c} dP_s^j \end{cases} \quad (19)$$

$$du = K^{-1} [H\lambda + dP] \quad (20)$$

式中: K 为总刚度矩阵, $K = \sum_{j=1}^{n_c} K^j + \sum_{j=1}^{n_c} K_c^j \in R^{n \times n}$, K^j 为第 j 个单元的刚度矩阵, $K^j = (\int_{\Omega_j} T_c^j B^j D^j B^j T_c^j d\Omega)$, 其中 D 为弹性矩阵; K_c^j 为第 j 个接触单元的接触刚度矩阵, $K_c^j = (\int_{\Gamma_c^j} T_c^j D_c^j N_c^j T_c^j d\Gamma)$; H 系统势矩阵, $H = \sum_{j=1}^{n_c} (\int_{\Gamma_c^j} T_c^j N_c^j (D_c^j (\frac{\partial g}{\partial R_c}))^T T_c^j d\Gamma)$, 其中 T_c^j 为第 j 个单元的滑移参量 λ^j 与总体 λ 之间的关系矩阵, $\lambda^j = T_c^j \lambda$; $dP_p^j = (\int_{\Gamma_c^j} T_c^j N_c^j D_c^j N_c^j T_c^j \delta_c^j d\Gamma)$, T_c^j 为 δ_c^j 向接触间隙全空间 δ_c 的扩展矩阵, $\delta_c^j = T_c^j \delta_c$. dP_s^j 为外载荷向量增量, $dP_s^j = \int_{\Omega} T_c^j N^j db d\Omega + \int_{\Omega} T_c^j N^j (B^j D^j \beta dT) d\Omega + \int_{\Gamma_c^j} T_c^j N^j d\bar{P} d\Gamma$, 其中 N^j 为形函数矩阵; dP_s^j 为接触单元初始间隙引起的伪载荷向量.

2.2 滑移参量的确定

将接触面屈服函数 $\Phi_i (i=1, 2, \dots, n+1)$ 作一阶 Taylor 展开:

$$\begin{cases} \Phi_{n+1} = \Phi_{n+1}^0 + \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial R_n} dR_n = \Phi_{n+1}^0 + E(d\varepsilon_n + \delta_n - \lambda_{n+1}) \\ \Phi_i = \Phi_i^0 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial R_i} dR_i + \frac{\partial \Phi_i}{\partial R_i} dR_i + \frac{\partial \Phi_i}{\partial R_n} dR_n = \Phi_i^0 + E(\cos \alpha_i d\varepsilon_i + \sin \alpha_i d\varepsilon_i - \lambda_i) + \mu E(d\varepsilon_n + \delta_n - \lambda_{n+1}) \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (21)$$

令 $\Phi_i' = \Phi_i^0 + E(\cos \alpha_i d\varepsilon_i + \sin \alpha_i d\varepsilon_i) + \mu E(d\varepsilon_n + \delta_n - \lambda_{n+1})$,

$$\Phi_{n+1}' = \Phi_{n+1}^0 + E(d\varepsilon_n + \delta_n)$$

根据式(6)、式(21)得:

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} 0 & (\text{若 } \Phi_{n+1}' \leq 0) \\ \Phi_{n+1}' / E + d\varepsilon_n + \delta_n & (\text{若 } \Phi_{n+1}' > 0) \end{cases} \quad (22)$$

$$\lambda_i = \begin{cases} 0 & (\text{若 } \Phi_i' \leq 0) \\ \Phi_i' / E + (\cos \alpha_i d\varepsilon_i + \sin \alpha_i d\varepsilon_i) + \mu(d\varepsilon_n + \delta_n - \lambda_{n+1}) & (\text{若 } \Phi_i' > 0) \end{cases}$$

从式(22)可以看出: λ 依赖于两接触体的相对位移增量 $d\varepsilon$, 相对位移增量由接触体的温度场和接触压力所决定.

2.3 热接触问题的迭代求解策略

物体的温度场将导致热变形, 这种热变形和弹性变形叠加, 使变形分布状况改变, 从而使接触状态改变. 反过来, 接触状态改变, 接触压力变化, 从而影响接触区域附近的温度场. 因此, 热接触问题的温度场、位移场和应力场是相互耦合的, 单纯采用耦合迭代算法求解, 计算成本较大, 因此引入 Steffensen 加速迭代策略. 具体如下:

定义算子 ψ :

$$\psi(du) = K^{-1} [H\lambda(du) + dP] \quad (23)$$

由式(20)知, 位移增量 du 就是算子 ψ 的不动点, 其迭代格式为

$$du^{(k+1)} = \psi(du^{(k)}) \quad (k=1, 2, \dots) \quad (24)$$

因此热接触问题可用不动点迭代算法求解.

对于不动点迭代 $X^{(k+1)} = \Gamma(X^{(k)})$, 可采用 Steffensen 构造的加速迭代格式^[7]:

$$\begin{cases} Y^{(k)} = \Gamma(X^{(k)}) \\ Z^{(k)} = \Gamma(Y^{(k)}) \\ X^{(k+1)} = X^{(k)} - \frac{(Y^{(k)} - X^{(k)})^2}{Z^{(k)} - 2Y^{(k)} + X^{(k)}} \end{cases} \quad (25)$$

从式(25)可以看出, Steffensen 算法是每作两次迭代进行一次加速, 将其用于不动点迭代式(24), 可以得到热弹性接触问题加速迭代算法: 1) 令 $k=0$, 计算初值 $du^{(k)} = K^{-1} dP$; 2) 令 $i=0$, $X^{(i)} = du^{(k)}$; 3) 利用式(22)计算 $\lambda^{(k)}$; 4) 计算位移增量 $du^{(k+1)} = K^{-1} [H\lambda^{(k)} + dP]$; 5) 令 $i=i+1$, $X^{(i)} = du^{(k+1)}$; 6) 令 $i=2$, $du^{(k+1)} = X^{(0)} - [X^{(1)} - X^{(0)}]^2 / [X^{(2)} - 2X^{(1)} + X^{(0)}]$; 7) 若 $|du^{(k+1)} - du^{(k)}| \leq 0.001 |du^{(k+1)}|$, 迭代结束; 否则, 令 $k=k+1$, 若 $i=2$, 返回步骤 2), 反之, 返回步骤 3).

在 du 的迭代求解过程中, 刚度矩阵形成后保持不变, 迭代过程中每作两次迭代进行一次加速, 可显著提高求解速度.

3 结论

在某种假定的接触状态下, 按接触传热的非

线性边界条件求得的温度场会直接影响弹性接触状态,按弹性接触理论进行非线性分析求得的接触状态又会改变原来求温度场时假定的接触状态,因而分析热接触问题必须考虑热与可移动接触边界间的耦合作用。为了解决这类问题,笔者推导了三维热弹性接触问题的互补方程及热应力作用下三维热弹性接触系统有限元方程。在该方程中引入了接触间隙伪荷载,以反映接触状态变化对荷载项的影响。在迭代求解过程中采取每作两次迭代进行一次加速的策略,显著提高了求解效率。

参考文献:

- [1] JOHANSSON L, KLARBRING A. The thermo elastic frictional contact problems: modeling, finite element approximation and numerical realization[J]. Computer Methods Appl Mech Eng. 1993,105:181-210.
- [2] WRIGGERS P, MIEHE C. Contact constrains within coupled thermo-mechanic alanalysis - A finite element model[J]. Computer Methods Appl Mech Engng, 1994,113:301-319.
- [3] JUN P, BYUNG M. Formulation of thermo mechanical frictin contact based on complementary relations. Int J Solids & structures[J]. 1994,31:3217-3231.
- [4] 张洪武,顾元宪,钟万勰. 传热与接触两类问题耦合作用的有限元分析[J]. 固体力学学报,2000,21(3):218-224.
- [5] 李润方,李健,林腾蛟. 瞬态耦合热弹塑性接触有限元分析方法[J]. 计算结构力学及其应, 1993,10(3):254-263.
- [6] 钟万勰,张洪武,吴成伟. 参变量变分原理及其在工程中的应用[M]. 北京:科学出版社,1997.
- [7] 易大义,蒋叔豪,李有法. 数值方法[M]. 杭州:浙江科学技术出版社,1984:196-197.
- [8] 肖友刚,雷先明,陈国新. 筒体与滚圈大面积多体接触问题的有限元解法[J]. 郑州大学学报:工学版,2006,27(4):75-78.

Complementary Equation and Finite Element Solution of 3D Thermo-elastic Contact Problem

XIAO Si - pu¹, XIAO You - gang², LEI Xian - ming¹, SHI Yu¹

(1. Department of Mechanical and Energy Engineering, Shaoyang University, Shaoyang 422004, China; 2. College of Traffic and Transportation Engineering, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: Through defining slide yield function and floating potential function of thermo-contact surface, the complementary equation of thermo-contact boundary was got. Based on virtual work principle and contact element technology, the finite element equation of 3D elastic contact system was deduced under the effect of thermal stress. The pseudo load brought by contact gap was introduced into this equation in order to reflect the contact state change. During iteration, after two iteration, one acceleration will be carried out, which will improve calculation efficiency greatly.

Key words: thermo-elastic; contact problem; complementary equation; finite element solution