

US - FE - LSPIM 四边形单元的自由振动研究

贾程¹, 陈国荣¹, 陈卉卉²

(1. 河海大学 工程力学系, 江苏 南京 210098; 2. 解放军理工大学 国防人防系, 江苏 南京 210007)

摘 要: 为了提高在网格变形时的数值计算精度, 基于非对称有限单元的概念, 提出 US - FE - LSPIM 四边形单元。该单元是利用两种不同的形函数集合, 即: 传统的四节点等参形函数集和 FE - LSPIM 四边形单元形函数集分别作为检验函数和试函数构成。它能方便地施加整段长度的位移边界条件。通过研究该四边形单元在悬臂梁二维自由振动中的表现, 表明该单元具有很高的计算精度; 并且在变形网格下该单元结果优于 QUAD4 单元, 对网格变形不敏感。

关键词: 有限元 - 无网格; 网格变形; 振动性; 形函数; 四边形单元

中图分类号: O 343.5 **文献标识码:** A

0 引言

过去几十年中, 出现了一些解决固体力学振动问题的数值方法, 如瑞利 - 里兹法、有限单元法、无网格法。有限单元法受到广泛的应用, 但其仍存在不足。如等参单元对于网格几何变形非常敏感。无网格法有效地避免了有限元的一些缺点, 具有精度高、应力连续的特点。但无网格法形函数没有 Kronecker - δ 性质, 不能直接施加本质边界条件^[1-2]。对于不连续问题, 需要引入不连续函数。近来出现了利用单位分解法形成的一些杂交方法, 如单位分解有限单元法(PUFEM)^[3]和广义有限单元法(GFEM)^[4]。由 S. Rajendran 和 B. R. Zhang^[5]提出的 FE - LSPIM 四边形单元属于此类方法。

笔者利用非对称公式, 提出 US - FE - LSPIM 四边形单元, 即分别用四节点等参形函数插值的位移函数、FE - LSPIM 四边形单元形函数插值的位移函数作为检验函数和试函数而构成。本文将 US - FE - LSPIM 四边形单元用于分析自由振动问题。

1 基本理论

1.1 FE - LSPIM 四边形单元的形函数

单元内位移 u 写成

$$u(x, y) = N' u' \quad (1)$$

其中,

$$N' = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \quad (2)$$

式中: $N_i (i=1, 2, 3, 4)$ 是传统的四节点等参形函数。

$$u' = \{u_1(x, y) \ u_2(x, y) \ u_3(x, y) \ u_4(x, y)\}^T \quad (3)$$

$u_i(x, y) (i=1, 2, 3, 4)$ 为节点位移函数, 在该节点处等于其位移值, 即 $u_i(x_i, y_i) = u_i, i=1, 2, 3, 4$ 。位移函数 $u_i(x, y)$ 由 i 点的支持域内的节点值运用最小二乘点插值法(LSPIM)得到,

$$u_i(x, y) = \Phi_i u_i, (i=1, 2, 3, 4) \quad (4)$$

$$\Phi_i = [\Phi_1^i \ \Phi_2^i \ \Phi_3^i \ \cdots \ \Phi_N^i], (i=1, 2, 3, 4) \quad (5)$$

$$u_i = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \cdots \ u_N]^T \quad (6)$$

式中: Φ_i 是 LSPIM 法的关于节点 i 的形函数矩阵; u_i 是节点 i 支持域内节点的位移参数向量; N 是节点 i 支持域内的所有节点数。对于该单元内的其他节点, N 可能不同。一个单元所有节点支持域的合集构成了一个单元的支持域 Ω 。

节点支持域的定义和单元支持域的定义分别如图 1 和图 2 所示。

设单元支持域 Ω 内的节点数为 M , 则 $1 \leq N \leq M$, 方程式(4)就可以写成单元支持域的形式:

$$U' = \begin{Bmatrix} u_1(x, y) \\ u_2(x, y) \\ u_3(x, y) \\ u_4(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_1 u_1 \\ \Phi_2 u_2 \\ \Phi_3 u_3 \\ \Phi_4 u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} \cdot \begin{matrix} u \\ u \\ u \\ u \end{matrix} \quad (7)$$

收稿日期: 2008-10-24; 修订日期: 2008-12-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50539030)

作者简介: 贾程(1981-), 男, 江苏镇江人, 河海大学博士研究生, 主要研究方向为数值计算仿真, E-mail: jctonm@

163.com.

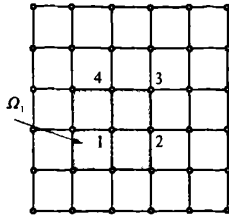


图1 节点1的支持域
Fig.1 Support of node 1

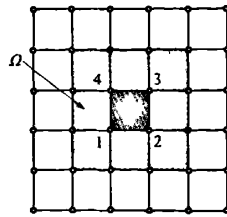


图2 单元的支持域
Fig.2 Element support

式中: Φ 是相应于单元支持域的 LSPIM 单元形函数矩阵, u 是单元支持域内所有节点的 x 方向的位移向量。对于节点 i , 如果节点 j 不在节点 i 的支持域中, 那么 Φ_{ij} 等于零。为了方便起见, 方程(7)中 Φ 的前 4 列为该单元的 4 个节点, 其他列则是该支持域内的其他点。

将式(7)代入(1), 得

$$u(x, y) = N'(\Phi u) = (N'\Phi)u = \Psi u \quad (8)$$

从式(8)中, 我们得到该单元的形函数矩阵:

$$\Psi = N' \cdot \Phi = [\Psi_1 \quad \Psi_2 \quad \Psi_3 \quad \Psi_4 \quad \Psi_5 \quad \dots \quad \Psi_M] \quad (9)$$

1.2 F_i 的形成

节点的位移可以写成下列形式:

$$u_i = P \cdot a \quad (10)$$

其中,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & x_i^2 y_i & x_i y_i^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2^2 y_2 & x_2 y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3^2 y_3 & x_3 y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4^2 y_4 & x_4 y_4^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & y_N & x_N^2 & x_N y_N & y_N^2 & x_N^2 y_N & x_N y_N^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$u_i = [u_i \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad \dots \quad u_N]^T \quad (12)$$

$$a = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad \dots \quad a_8]^T \quad (13)$$

为了方便起见, 该单元的第二个节点记为节点 i 。

由于传统的最小二乘近似使得节点 i 的位移近似值不等于该点的位移值, 即 $u_i \neq p(x_i, y_i)a$, 导致位移条件施加比较困难。故为了使节点 i 的位移近似值等于该点的位移值, 利用式(10)中的第一个方程解出 a_1 , 再从式(10)其余的方程中消去 a_1 , 可得

$$\bar{u}_i = \bar{P} \bar{a} \quad (14)$$

其中,

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} x_2 - x_i & y_2 - y_i & x_2^2 - x_i^2 & x_2 y_2 - x_i y_i & y_2^2 - y_i^2 & x_2^2 y_2 - x_i^2 y_i & x_2 y_2^2 - x_i y_i^2 \\ x_3 - x_i & y_3 - y_i & x_3^2 - x_i^2 & x_3 y_3 - x_i y_i & y_3^2 - y_i^2 & x_3^2 y_3 - x_i^2 y_i & x_3 y_3^2 - x_i y_i^2 \\ x_4 - x_i & y_4 - y_i & x_4^2 - x_i^2 & x_4 y_4 - x_i y_i & y_4^2 - y_i^2 & x_4^2 y_4 - x_i^2 y_i & x_4 y_4^2 - x_i y_i^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N - x_i & y_N - y_i & x_N^2 - x_i^2 & x_N y_N - x_i y_i & y_N^2 - y_i^2 & x_N^2 y_N - x_i^2 y_i & x_N y_N^2 - x_i y_i^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\bar{a} = [a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad \dots \quad a_8]^T \quad (16)$$

$$\bar{u}_i = [u_2 - u_i \quad u_3 - u_i \quad u_4 - u_i \quad \dots \quad u_N - u_i]^T \quad (17)$$

则由最小二乘法得

$$\bar{a} = \bar{Q} \bar{u}_i \quad (18)$$

其中, $\bar{Q} = (\bar{P}^T \bar{P})^{-1} \bar{P}^T$ 。

节点 i 邻域内位移又可以表示为

$$u_i(x, y) = a_1 + \bar{p}(x, y) \bar{a} \quad (19)$$

则

$$u_i = a_1 + \bar{p}(x_i, y_i) \bar{a} \quad (20)$$

并将式(18)、(20)代入式(19), 化简得

$$u_i(x, y) = \Phi_i u_i \quad (21)$$

此处, LSPIM 的节点形函数 F_i 可写成:

$$\Phi_i = \left[1 - \left(\bar{q} \cdot \bar{Q} \right) \begin{matrix} I \\ (1 \times 7 \times (N-1)) \times 1 \end{matrix} \right] \begin{matrix} \bar{q} \\ (1 \times 7 \times (N-1)) \end{matrix} \quad (22)$$

其中 I 为所有元素均为 1 的列向量。

$$\bar{q} = \bar{q}(x, y) = \bar{p}(x, y) - \bar{p}(x_i, y_i) \quad (23)$$

$$\bar{p}(x, y) = [x_i \quad y_i \quad x_i^2 \quad x_i y_i \quad y_i^2 \quad x_i^2 y_i \quad x_i y_i^2] \quad (24)$$

则 $F_i (i=1, 2, 3, 4)$ 均可求出。

1.3 US-FE-LSPIM 四边形单元

线弹性体在平衡状态下的虚功方程为:

$$\int_{\Omega} \delta \epsilon^T s d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega - \int_{\Gamma} \delta u^T t d\Gamma = 0 \quad (25)$$

式中: b 为体力, t 为面力, δu 是虚位移场, $\delta \epsilon$ 是相应的虚应变场, s 为真实的应力场。

对于一个完整的二次位移场, 位移可以写成:

$$u(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 \quad (26)$$

$$v(x, y) = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 x^2 + b_5 xy + b_6 y^2 \quad (27)$$

式中: a_i 和 $b_i (i=1, 2, 3, \dots, 6)$ 是任意常数; x, y 是笛卡尔坐标。

根据高阶单元形函数完整性条件的要求^[6], 为了重构式(26)、(27)表示的位移域, 形函数 S 须满足下列方程:

$$\sum_i S_i = 1 \quad (28a) \quad \sum_i S_i x_i = x \quad (28b)$$

$$\sum_i S_i y_i = y \quad (28c) \quad \sum_i S_i x_i^2 = x^2 \quad (28d)$$

$$\sum_i S_i x_i y_i = xy \quad (28e) \quad \sum_i S_i y_i^2 = y^2 \quad (28f)$$

根据 $\Psi^{[5]}$ 函数的重构性, FE-LSPIM 四边形单元形函数 Ψ 才能满足(28a) - (28f)。但是常规的四边形等参元形函数可以满足(28a) - (28c), 不能满足(28d)和(28f)。而且只有在网格没有畸变的情况下, 等参元形函数才能满足(28e)。

方程(25)中的虚位移可以是任意的, 只要它满足本质边界条件和域内连续性条件。常规的四边形等参元形函数是个合适的选择。那么,

$$\delta u^{(e)} = \delta u^{(e)} \equiv N \delta \bar{u}_n^{(e)} \quad (29)$$

$$\delta \epsilon^{(e)} = \delta \epsilon^{(e)} \equiv B \delta \bar{u}_n^{(e)} \quad (30)$$

式中: N, \bar{B} 分别是通常的等参元形函数矩阵和应变矩阵. 相对于 FE-LSPIM 四边形单元, 选择式 (29) 和 (30) 作为检验函数能够在整段长度的边界上施加位移, 而不用罚函数或拉格朗日乘子法.

将式 (29)、(30) 代入式 (25), 得

$$\sum_{e=1}^K \left(\int_{\Omega^{(e)}} \delta \bar{u}_n^{(e)T} \bar{B}^T \sigma d\Omega^{(e)} - \int_{\Omega^{(e)}} \delta \bar{u}_n^{(e)T} N^T F d\Omega^{(e)} - \int_{\Gamma^{(e)}} \delta \bar{u}_n^{(e)T} N^T t d\Gamma^{(e)} \right) = 0 \quad (31)$$

式中: $\sum_{e=1}^K$ 表示单元的累加, σ 是真实的应力. 在传统的伽辽金法中, σ 是由等参元插值表示的 $\bar{\sigma}$ 替代, 则式 (31) 可以改写成

$$\sum_{e=1}^K \left(\int_{\Omega^{(e)}} \delta \bar{u}_n^{(e)T} \bar{B}^T \bar{s}^{(e)} d\Omega^{(e)} - \int_{\Omega^{(e)}} \delta \bar{u}_n^{(e)T} N^T \bar{F}^{(e)} d\Omega^{(e)} - \int_{\Gamma^{(e)}} \delta \bar{u}_n^{(e)T} N^T \bar{t}^{(e)} d\Gamma^{(e)} \right) = 0 \quad (32)$$

从式 (32) 的左边减去式 (31) 的左边,

$$\sum_{e=1}^K \left(\int_{\Omega^{(e)}} \delta \bar{u}_n^{(e)T} \bar{B}^T (\bar{\sigma}^{(e)} - \sigma^{(e)}) d\Omega^{(e)} - \int_{\Omega^{(e)}} \delta \bar{u}_n^{(e)T} N^T (\bar{F}^{(e)} - F^{(e)}) d\Omega^{(e)} - \int_{\Gamma^{(e)}} \delta \bar{u}_n^{(e)T} N^T (\bar{t}^{(e)} - t^{(e)}) d\Gamma^{(e)} \right) = 0 \quad (33)$$

伽辽金公式迫使式 (33) 等于零. 面力和体力的分布完全由等参元形函数插值得到. 则式 (33) 的第二项和第三项等于零, 式 (33) 可写成

$$\sum_{e=1}^K \left(\int_{\Omega^{(e)}} \delta \bar{u}_n^{(e)T} \bar{B}^T (\bar{\sigma}^{(e)} - \sigma^{(e)}) d\Omega^{(e)} \right) = 0 \quad (34)$$

这个等式在全局层次上成立, 但在单元层次上不一定成立. 这是由于等参形函数不能满足高阶单元完整性的要求. 为了改善单元的性能, 我们使用非对称有限单元的概念, 选择 FE-LSPIM 四边形单元形函数插值的应力作为试函数. 即

$$\hat{u}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \hat{u}^{(e)}(x, y) \\ \hat{v}^{(e)}(x, y) \end{Bmatrix} = Q \hat{u}_n^{(e)} \quad (35)$$

$$\hat{e}^{(e)} = \hat{L} u^{(e)} \equiv \hat{B} \hat{u}_n^{(e)} \quad (36)$$

$$\hat{B} \equiv LQ \quad (37)$$

$$\hat{\sigma}^{(e)} = D \hat{e}^{(e)} \quad (38)$$

其中,

$$Q = \begin{bmatrix} \Psi_1 & 0 & \Psi_2 & 0 & \Psi_3 & 0 & \cdots & \Psi_n & 0 \\ 0 & \Psi_1 & 0 & \Psi_2 & 0 & \Psi_3 & \cdots & 0 & \Psi_n \end{bmatrix} \quad (39)$$

将式 (35) ~ (38) 代入式 (34), 得

$$\sum_{e=1}^K \left(\int_{\Omega^{(e)}} \delta \bar{u}_n^{(e)T} \bar{B}^T D L (\hat{u}^{(e)} - u^{(e)}) d\Omega^{(e)} \right) = 0 \quad (40)$$

由于 FE-LSPIM 四边形单元形函数能够在单元任何一点中准确地重构单项式基 $\{1, x, y, x^2,$

$xy, y^2, x^2y, xy^2\}$ 中的任何一项, 则 $\hat{u}^{(e)} - u^{(e)} = 0$.

这样式 (40) 就能在单元层次上成立. 这是比用四节点等参元形函数插值作试函数更好的选择. 则将 FE-LSPIM 四边形单元形函数插值代入式 (31) 可得,

$$\sum_{e=1}^K \left(\int_{\Omega^{(e)}} \delta \bar{u}_n^{(e)T} \bar{B}^T D \hat{B} \hat{u}_n^{(e)} d\Omega^{(e)} - \int_{\Omega^{(e)}} \delta \bar{u}_n^{(e)T} N^T F^{(e)} d\Omega^{(e)} - \int_{\Gamma^{(e)}} \delta \bar{u}_n^{(e)T} N^T t^{(e)} d\Gamma^{(e)} \right) = 0 \quad (41)$$

系统方程则为

$$KU = F \quad (42)$$

$$\text{其中, } K = \sum_{e=1}^K \left(\int_{\Omega^{(e)}} B^T D \hat{B} d\Omega^{(e)} \right) \quad (43)$$

$$F = \sum_{e=1}^K \left(\int_{\Omega^{(e)}} N^T F^{(e)} d\Omega^{(e)} + \int_{\Gamma^{(e)}} N^T t^{(e)} d\Gamma^{(e)} \right) \quad (44)$$

1.4 自由振动的特征值问题

自由振动的特征值问题为

$$K\phi - \lambda M\phi = 0, \lambda = \omega^2 \quad (45)$$

式中: λ 和 ω 分别是相应于模态 ϕ 的特征值和固有圆频率. 质量矩阵 M 为

$$M = \sum_{e=1}^K \left(\int_{\Omega^{(e)}} \rho N^T Q d\Omega^{(e)} \right) \quad (46)$$

式中: Q 为式 (39) 定义的形函数矩阵.

2 数值算例

2.1 悬臂梁

悬臂梁长 100 mm, 宽 10 mm, 悬臂梁的杨氏模量 $E = 2.058 \times 10^2$ GPa, 泊松比 $\mu = 0.3$, 厚度 $t = 1$ mm, 密度 $\rho = 7.84 \times 10^3$ kg/m³. 使用 (2 × 20) 粗网格和 (5 × 50) 密网格划分模型, 密网格计算所得固有频率列于表 1. 参考结果是由 Liu 和 Gu^[6] 用 ABAQUS 划分 8 000 个自由度计算所得.

表 1 悬臂梁在密网格下计算所得固有频率

Tab. 1 computed frequencies for the cantilever beam with a fine mesh

模态	LRPIM ^[8]		FEM		US-FE-LSPIM		参考值 ^[4]
	频率 /Hz	误差 /%	频率 /Hz	误差 /%	频率 /Hz	误差 /%	
1	824.3	0.16	830	0.85	821.2	0.22	823
2	4 976.6	0.80	4 979	0.85	4 928.7	0.17	4 937
3	12 826.5	0.02	12 826	0.02	12 811.1	0.10	12 824
4	13 093.5	0.68	13 111	0.82	12 993.1	0.09	13 005
5	23 781.9	0.63	23 818	0.79	23 620.5	0.05	23 632
6	36 258.3	0.61	36 308	0.74	36 047.3	0.02	36 040

从表 1 可以看出,US - FE - LSPIM 四边形单元的结果比 LRPIM 和 FEM 的结果精确,非常接近参考值.

为了研究计算频率的收敛率和 US - FE - LSPIM 四边形单元对网格变形的敏感性,将模型用一系列的四个变形单元划分,如图 3 所示.

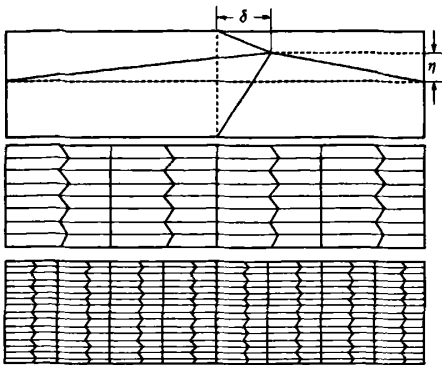


图 3 一系列变形的网格
Fig. 3 The sequence of distorted meshes

分别用 3 种单元:US - FE - LSPIM 四边形单元、传统四边形等参单元 (QUAD4)、QM6 单元计算. 3 种单元的第一阶频率的相对误差如图 5 所示. 图中以 $\lg_{10} h$ 为横坐标, \lg_{10} (相对误差) 为纵坐标, 其中 $h(\text{mm})$ 为网格尺寸. 从图上可以看出 US - FE - LSPIM 四边形单元的误差远远小于 QUAD4、QM6 单元, 而且收敛速度也比它们快.

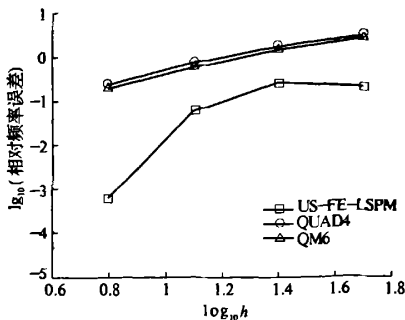


图 4 一阶频率的相对误差
Fig. 4 The relative error of the first frequencies

2.2 变形敏感性测试

图 3 所示为变形网格 (图中 δ 和 η 表示网格变形程度), 可用以检验 US - FE - LSPIM 四边形单元的网格变形敏感性. 将 2.1 中悬臂梁划分为此变形网格进行计算, 结果见表 2.

表 2 变形敏感性测试的固有频率
Tab.2 Natural frequencies for the distortion sensitivity test

单元	Hz			
	$\delta=0$ $\eta=0$	$\delta=10$ $\eta=1$	$\delta=20$ $\eta=1$	$\delta=30$ $\eta=1$
QUAD4	2 619.5	3 411.3	3 544.6	3 693.9
QM6	852.52	2 913.3	2 602.3	2 133.5
US - FE - LSPIM	957.53	988.55	1 046.27	1 106.40
参考值 ^[6]	823			

从表 2 中可以看出,US - FE - LSPIM 四边形单元的误差随着网格的变形增加轻微地增加, 而 QUAD4、QM6 单元则是快速地增加. 说明 US - FE - LSPIM 四边形单元对网格变形不太敏感.

3 结论

- (1) 对于规则的网格, US - FE - LSPIM 四边形单元的计算结果和局部径向点插值法 (LRPIM) 很吻合, 而且精度比四边形等参元 (QUAD4) 高.
- (2) 对于粗网格, US - FE - LSPIM 四边形单元的精度总体上比局部径向点插值法 (LRPIM)、四边形等参元 (QUAD4) 高.
- (3) 对于变形的网格, US - FE - LSPIM 四边形单元的结果比四边形等参元 (QUAD4) 的要好, 并且具有更快的收敛速度. 变形敏感性测试表明, 该单元对网格变形不太敏感.

参考文献:

[1] BELYTSCHKO T, LU Y Y, GU L. Element - free Galerkin methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1994, 37:229 - 256.

[2] 孟闻远, 卓家寿. 基于 Taylor 展开的无单元插值形函数及应用[J]. 郑州大学学报: 理学版, 2004, 36 (3): 49 - 53.

[3] MELENK J M, BABUSKA I. The partition of unity finite element method: basic theory and applications [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1996, 139:289 - 314.

[4] ODEN J T, DUARTE C A, ZIENKIEWICZ O C. A new cloud - based hp finite element method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1998, 153:117 - 126.

[5] RAJENDRAN S, ZHANG B R. A "FE - meshfree" QUAD4 element based on partition of unity[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2007, 197:128 - 147.

标.因此,城市滨河地区的更新必须立足于自身独特的自然环境、历史人文、经济社会特点,探索具体适应本城市的规划思路,选择最为有效的开发模式,不可照搬,也不拘泥于某种模式.

参考文献:

- [1] I. L. 麦克哈格. 设计结合自然[M]. 苗经纬译. 北京:中国建筑工业出版社,1992.
- [2] 杨建军,徐国良. 杭州运河沿河地带城市再开发规划研究[J]. 城市规划,2001,(2):77-80.
- [3] 杨保军,董珂. 滨水地区城市设计探讨[J]. 建筑学报,2007,(7):7-10.
- [4] 韩冬青. 门槛的衰微——城市. 建筑综合系研究初探[J]. 建筑师,1996,(8):85.
- [5] 唐德华. 提高城市滨水开放空间使用率的规划设计途径研究[D]. 武汉华中科技大学建筑学院,2005.

Research on Renewal Pattern of Riverfront Areas

LUAN Chun-feng^{1,2}, WANG Hao¹

(1. School of landscape architecture, Nanjing Forestry University, Nanjing 210037, China; 2. School of Architecture, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: The renewal of riverfront areas in our country is still in the initial stage. Based on the characteristics of renewal elements in natural environment, history of humanity, economic and social, the patterns of riverfront areas renewal are divided into four kinds which are environment improvement, reuse basing on protection, further development by transformation. They represent basic, conservative, innovation and comprehensive update mode separately and at the same time they provide a wide range of choices for the renewal of riverfront areas.

Key words: riverfront area; renewal; pattern

(上接第132页)

- [6] LIU G R, GU Y T. A local radial point interpolation method (LRPIM) for free vibration analyses of 2-D solids[J]. Journal of Sound and Vibration. 2001, 246:29-46.

The Free Vibration Analysis of US - FE - LSPIM QUAD4 Element

JIA Cheng¹, CHEN Guo-rong¹, CHEN Hui-hui²

(1. Department of Engineering Mechanics, Hohai University, Nanjing 210098, China; 2. Engineering Institute of Engineering Corps, PLA University of Science and Technology, Nanjing 210007, China)

Abstract: In order to improve precision of numerical calculation for distorted meshes, the US - FE - LSPIM QUAD4 element is developed based on the concept of unsymmetric finite element formulation. This element uses two different sets of shape functions for the trial and test functions, viz. sets of FE - LSPIM QUAD4 element shape functions and sets of classical isoparametric shape functions. The US - FE - LSPIM QUAD4 element could easily fulfil exact essential boundary condition along the entire length of the edge. The element is used in the free vibration analysis of cantilever beam and shear wall. The results show that this element possesses good precision. Furthermore, this element is superior to QUAD4 element for distorted meshes and less sensitive to mesh distortion.

Key words: FE - meshfree; mesh distortion; completeness; compatibility