

物料破碎过程中的应力研究

母福生, 李 磊

(中南大学 机电工程学院, 湖南 长沙 410083)

摘 要: 利用热力学原理和损伤力学理论对物料的破碎过程进行分析, 获得物料破碎过程中的应力方程, 并通过大理石循环加载实验, 验证物料破碎过程中的应力方程合理性, 从而得到应力方程的临界值可作为物料破碎的强度判据。

关键词: 破碎; 能量; 损伤; 应力

中图分类号: TD 921

文献标识码: A

0 引言

物料中存在随机分布的多种缺陷, 而且多为复杂的不连续结构, 这使得物料的破碎表现出很大的复杂性、模糊性和不确定性。目前对物料破碎过程中的应力研究主要是采用经典强度理论, 而传统的经典强度理论采用了连续介质的假定^[1], 这与实际破碎的物料不符。由热力学定律可知, 能量转化是物料破碎过程的本质特征, 因此研究物料破碎过程中的能量变化规律与强度之间的关系, 将更有利于反映物料破碎的本质特征^[2-6]。

1 物料破碎过程中的能量守恒

根据热力学第一定律: 单位时间内物料内能的增量等于外界破碎物料提供的机械能和热能之和, 即:

$$\int_V \rho \frac{d\Phi}{dt} dV = \int_V \sigma \dot{\epsilon} dV - \int_V \text{div} q dV \quad (1)$$

式中: ρ 为物料的密度; Φ 为单位质量物料的内能; V 为物料的体积; σ 为作用在物料上的应力; ϵ 为相应的应变; $\text{div} q$ 为单位时间内通过单位体积物料的热流量。

2 物料破碎过程中的能量耗散

物料的破碎既包括可逆的弹性过程, 也包括塑性、损伤、热释放等不可逆过程。正是由于不可逆过程的发生, 导致了物料破碎过程中的能量耗散。根据热力学第二定律, 能量耗散的不可逆过程满足熵增加原理^[7]:

$$\rho T \dot{S} + \text{div} q - q \frac{\nabla T}{T} \geq 0 \quad (2)$$

式中: \dot{S} 为单位质量物料的熵; T 为绝对温度; ∇ 为梯度算子。

引入单位质量物料的自由能 Ψ 表达式:

$$\Psi = \Phi - TS \quad (3)$$

将式(3)代入式(1)的微分形式, 得

$$\sigma \dot{\epsilon} - \rho (\dot{\Psi} + S \dot{T} + \dot{S} T) - \text{div} q = 0 \quad (4)$$

将式(4)代入熵增不等式(2), 得

$$\sigma \dot{\epsilon} - \rho (\dot{\Psi} + S \dot{T}) - q \frac{\nabla T}{T} \geq 0 \quad (5)$$

为更好地说明物料破碎过程中的能量耗散, 引入建立在热力学理论基础上的损伤力学^[8]。将单位质量物料自由能 Ψ 看做热力学势函数的形式, 假定为:

$$\Psi = \Psi(\epsilon_e, D, \epsilon_p, T) \quad (6)$$

式中: ϵ_e 为物料破碎过程弹性应变; ϵ_p 为物料破碎过程塑性应变; D 为物料破碎过程中的损伤强度。

对上式(6)求导, 有

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_e} \dot{\epsilon}_e + \frac{\partial \Psi}{\partial D} \dot{D} + \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_p} \dot{\epsilon}_p + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \dot{T} \quad (7)$$

将式(7)和 $\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p$ 代入式(5), 得

$$\begin{aligned} & \left(\sigma - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_e} \right) \dot{\epsilon}_e - \rho \left(S + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \right) \dot{T} + \sigma \dot{\epsilon}_p - \\ & \rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial D} \dot{D} + \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_p} \dot{\epsilon}_p \right) - q \frac{\nabla T}{T} \geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)中 $\dot{\epsilon}_e$ 与 \dot{T} 在物料破碎中是可恢复的非永久变量, 因而是任意的也是独立的, 于是式

(8) $\dot{\epsilon}_e$ 与 \dot{T} 项前的系数应当为零。定义损伤应变能释放率 Y 和累积塑性硬化函数 R 为

$$Y = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial D} \quad (9)$$

$$R = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_p} \quad (10)$$

则式(8)可改写为

$$(\sigma - R) \dot{\varepsilon}_p + Y \dot{D} - q \frac{\nabla T}{T} \geq 0 \quad (11)$$

式(11)第一项代表物料破碎过程中的塑性硬化耗散,第二项代表损伤耗散,第三项代表热耗散。

根据式(9)可知,损伤变量必是损伤能量释放率的函数,谢和平通过模糊数学的方法和大量试验观测的方法确定了物料的损伤演化方程^[9]为

$$D = 1 - \exp[-B|Y - Y_0|^{\frac{1}{n}}] \quad (12)$$

式中: B, n 为与物料本身性质有关常数,可通过循环加载试验方法测定常数 Y_0 以及三组对应的数据,由下式计算

$$\begin{cases} n = \ln\left(\frac{Y_1 - Y_0}{Y_2 - Y_0}\right) / \ln\left(\frac{\ln(1 - D_1)}{\ln(1 - D_2)}\right) \\ B = -\ln(1 - D_3) / (Y_3 - Y_0)^{\frac{1}{n}} \end{cases} \quad (13)$$

3 物料破碎过程中的能量释放率

通常,损伤变量定义为一个无量纲的量,取值在0到1之间。考虑物料内的截面,物料受载作用下由于损伤而形成的微缺陷面积为 A_D ;物料此时瞬时表观面积为 A ;则有效承载面积为 $A^* = A - A_D$ 。物料的损伤变量为

$$D = \frac{A_D}{A} \quad (14)$$

根据 Lemaitre 应变等效原理^[10],对于物料破碎的有效应力

$$\sigma^* = \sigma \frac{A}{A - A_D} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (15)$$

式中: σ^* 为破碎过程中的有效应力。对于物料破碎的损伤状态,其损伤线弹性关系可按 Hooke 定律表示为

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma^*}{E} = \frac{\sigma}{(1 - D)E} = \frac{\sigma}{E^*} \quad (16)$$

式中: E 为物料未损伤弹性模量; E^* 为物料损伤后弹性模量。由式(16)可得

$$E^* = E(1 - D) \quad (17)$$

在大多数情况下,相对于与 ε_e 和 D 相关的弹性应变能,可以不考虑与 ε_p 相关的塑性硬化势能,以及与 T 相关的流动热能。于是单位体积物料的自由能可表示为

$$\rho \Psi(\varepsilon_e, D, \varepsilon_p, T) \approx \rho \Psi_e(\varepsilon_e, D) = \frac{1}{2} \sigma^* \varepsilon_e \quad (18)$$

式中: $\rho \Psi_e(\varepsilon_e, D)$ 为单位体积物料的弹性应变能,将其简写为 $\rho \Psi_e$ 。

将式(16)代入式(18),得

$$\rho \Psi_e = \frac{1}{2} \sigma^* \cdot \frac{\sigma^*}{E^*} (1 - D) \quad (19)$$

将式(19)代入式(9),得

$$Y = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial D} = \frac{1}{2} \sigma^* \cdot \frac{\sigma^*}{E^*} \quad (20)$$

再将式(17)代入式(20),得

$$Y = \frac{1}{2} \sigma^* \cdot \frac{\sigma^*}{E(1 - D)} = \frac{\rho \Psi_e}{1 - D} \quad (21)$$

上式表明了物料的弹性损伤能量释放率与弹性应变能之间的关系。将式(21)代入式(11)中,在忽略塑性硬化势能和热能的情况下得

$$\frac{\rho \Psi_e}{1 - D} \dot{D} \geq 0 \quad (22)$$

由于式(22)中 $\rho \Psi_e(\varepsilon_e, D)$ 和 \dot{D} 都是大于零的,于是上式可以简化为

$$\frac{1}{1 - D} \geq 0 \quad (23)$$

即: $D \leq 1$,而按照损伤变量的定义,它应具有非负值,即: $D \geq 0$ 。因此,这也就从热力学原理上得到了物料破碎损伤变量的取值范围,即: $0 \leq D \leq 1$ 。显然,这与物料损伤变量前面的定义是一致的。

4 物料破碎过程中的应力方程

根据弹性力学理论^[11],弹性应变能包括体积变化应变能和剪切应变能两部分,即

$$\rho \Psi_e = \frac{1}{2} \left(3 \frac{1 - 2\nu}{E} \frac{\sigma_m^2}{1 - D} + \frac{1 + \nu}{E} \frac{S_{ij} S_{ij}}{1 - D} \right) \quad (24)$$

式中: σ_m 为物料的平均应力; S_{ij} 为应力偏张量; ν 为物料的泊松比。

定义 Von Mises 等效应力 σ_{eq} 为:

$$\sigma_{eq} = \left(\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (25)$$

则弹性应变能 $\rho \Psi_e$ 可表示为

$$\rho \Psi_e = \frac{\sigma_{eq}^2}{2E(1 - D)} \left[3(1 - 2\nu) \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \right)^2 + \frac{2}{3}(1 + \nu) \right] \quad (26)$$

由于物料在破碎机械中一般为单向受力,则

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma, \sigma_{eq} = \sigma, \text{ 于是}$$

$$\sigma_{eq} \left[3(1 - 2\nu) \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \right)^2 + \frac{2}{3}(1 + \nu) \right]^{\frac{1}{2}} = \sigma \quad (27)$$

将式(21)和(27)代入式(26),得

$$Y = \frac{\sigma^2}{2E(1 - D)^2} \quad (28)$$

将式(12)代入式(28)得物料破碎过程中的应力方程

$$\sigma = \exp[-B|Y - Y_0|^{\frac{1}{n}}] \sqrt{2EY} \quad (29)$$

当物料破碎时, $Y = Y_p$ 为物料破碎的临界能量释放率,则对应于物料破碎的应力临界应力值 σ_p, σ_p 可通过实验测得,对于 Y_p ,式(29)是个超越方程,得不到其解析解,但通过对 $\sigma - Y$ 曲线的图解法,得到物料破碎的能量释放率临界值 Y_p 。

5 实验验证

选用大理石制作标准试件,试件为 $\Phi 50 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$ 的圆柱体,利用 Instron 型电液伺服材料试验机使试样受压,预压加载使载荷达到 1.5 kN,保证试样与压盘完全接触。对试样采用位移控制模式,加载速率为 0.005 mm/s,加载程序为 0 mm \rightarrow 0.2 mm \rightarrow 0.1 mm \rightarrow 0.3 mm \rightarrow 0.1 mm \rightarrow 0.4 mm \rightarrow 0.1 mm \rightarrow 破碎。实验数据通过数据采集分析仪和可编程应变放大器实行动态数据采集与记录。

图 1 为分析和计算实验数据,绘制的 $\sigma - Y$ 理论曲线和实测值由图 1 可知,理论值与实测值变化基本一致,验证了应力方程的合理性。

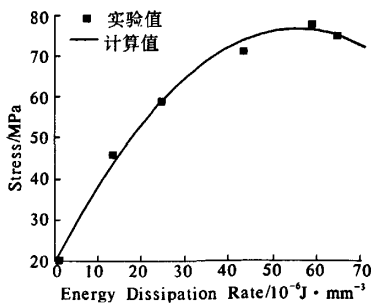


图 1 大理石试样循环加载的应力和损伤能量释放率曲线

Fig.1 Stress and Energy Dissipation Rate curve of marble sample under cyclic loading

6 结语

笔者通过热力学原理和损伤力学理论推导出了物料破碎过程中的应力方程,并通过大理石循环加载压缩实验,验证了应力方程的合理性,得出这一应力方程的临界值可作为物料破碎的强度判据。

参考文献:

- [1] 谢和平,陈忠辉. 岩石力学[M]. 北京:科学出版社,2004.
- [2] 谢和平,彭瑞东,鞠 杨,等. 岩石破坏的能量分析初探[J]. 岩石力学与工程学报,2005,24(15): 2603-2608.
- [3] 谢和平,彭瑞东,鞠 杨,等. 岩石破坏过程中的能量耗散[J]. 岩石力学与工程学报,2004,23(21): 3565-3570.
- [4] SUJATHA V. Chandra Kishen JM energy release rate due to friction at bi-material interface in dams[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 2003, 129(7): 793-800.
- [5] STEFFLER E D, EPSTEIN J S, CONLEY E G. Energy partitioning for a crack under remote shear and compression[J]. Int. J. Fracture, 2003, 120: 563-580.
- [6] 金丰年,蒋美蓉,高小玲. 基于能量耗散定义损伤变量的方法[J]. 岩石力学与工程学报,2004,23(12): 1976-1980.
- [7] 李如生. 非平衡热力学和耗散结构[M]. 北京:清华大学出版社,1986.
- [8] 易顺民,朱珍得. 裂隙岩体损伤力学导论[M]. 北京:科学出版社,2005.
- [9] 谢和平. 岩石混凝土损伤力学[M]. 北京:中国矿业大学出版社,1990.
- [10] LEMAITRE J. How to use damage mechanics[J]. Nuclear Engineering and Design, 1984, 80(3): 233-245.
- [11] 徐芝轮. 弹性力学[M]. 北京:人民教育出版社,1979.

Study on the Stress of Material Crushing Process

MU Fu-sheng, LI Lei

(College of Mechanical and Electrical Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: Based on thermomechanics principle and damage mechanics theory, the stress of material crushing process is analyzed, and the stress equation of material crushing process is obtained. The stress equation is sensible according to the experimental results of marble cyclic loading, and the criterion of material crushing is provided by critical value of the stress equation.

Key words: crushing; energy; damage; stress