

文章编号:1671-6833(2010)06-0119-03

径向点插值无网格法求解电磁场边值问题

夏茂辉,翟社霞,李海龙,于 玲

(燕山大学 理学院,河北 秦皇岛 066004)

摘 要:为有效解决点插值法在电磁场计算中遇到的系数矩阵奇异性问题及提高解的精度,将带有多项式的径向基函数点插值配点法引入到电磁场边值问题计算中.采用径向基函数耦合多项式基函数构造形函数,其插值函数具有 Kronecker Delta 函数性质,可以较方便地施加本质边界.将该方法应用到一维和二维电磁场边值问题计算中,最后用算例验证了此方法不仅在配点处有更高的计算精度而且提高了计算效率.在电磁场问题的研究中是一种有广阔应用前景的方法.

关键词:无网格法;电磁场;边值问题;径向基

中图分类号: O241.3 **文献标识码:** A

0 引言

无网格方法^[1-2]起源于20世纪70年代,无网格方法的产生有效解决了有限元法和边界元法在系统的形成阶段利用单元或网格信息的缺陷,它采用基于点的近似,不需要网格的初始划分和重构,已成为一种强有力的数值计算工具.

在电磁场领域内,有限元法^[3]虽然已是一种成熟而强大的计算工具,在电磁场的数值模拟方面也取得了许多重要成果,但是有限元法在电磁场的数值计算^[4-5]中也存在着缺点,如在反求形状优化、移动导线以及裂纹计算中出现的几何大变形,在应用有限元法求解时,它要求不断的单元重构,才能使计算顺利进行,因此给计算带来了难度,也影响了计算的精度.目前许多学者已将无网格方法应用于电磁场的计算中,但此方法在电磁场的研究中还处于起步阶段,许多问题有待进一步的探讨.

1 带有多项式的径向基点插值法

点插值方法是级数表达式型的函数近似方法之一,是一种实用的生成 MFree 形函数的方法,将求解域 Ω 用 m 个有限节点 $x_i (i=1, 2, \dots, m)$ 离散.在求解域中一标量函数 $u(x)$ 的近似函数 $u^h(x)$ 可以用以各节点 x_i 为中心的径向基函数 $R_i(x)$ 表示为:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^m R_i(x) a_i = R^T(x) a \quad (1)$$

式中: a_i 为待定系数; $R_i(x)$ 为径向基函数.笔者采用径向基函数主要是为了避免刚度矩阵的奇异性问题.选用 Gaussian (EXP) 函数,由于高斯函数不含额外参数影响点插值法的计算结果. $R_i(x) = \exp\{-[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2]\}$, 在(1)式中有 m 个未知数,令近似函数 $u^h(x)$ 在节点 x_i 处的值等于函数 $u(x)$ 在该节点处的值即: $u^h(x_i) = u_i$, 可得到 m 个方程组:

$$u^e = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}^T = R_0 a \quad (2)$$

其中,

$$R_0 = \begin{bmatrix} R_1(x_1) & R_2(x_1) & \cdots & R_n(x_1) \\ R_1(x_2) & R_2(x_2) & \cdots & R_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(x_m) & R_2(x_m) & \cdots & R_n(x_m) \end{bmatrix}$$

将式(2)系数矩阵 a 代入式(1)中得:

$$u^h(x) = R^T(x) R_0^{-1} u^e = \phi(x) u^e \quad (3)$$

其中形函数矩阵为

$$\begin{aligned} \phi(x) &= R^T(x) R_0^{-1} \\ &= [\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_m(x)] \end{aligned} \quad (4)$$

径向基函数插值满足条件 $u^h(x_i) = u(x_i) = u_i$, 形函数 $\phi_i(x_i) = \delta_{ij}$, 对其施加边界条件很容易, Micchelli^[6]从理论上证明了 TPS (即 this plate spline) 是正定的,从而有 EXP 条件是正定的,增加线性多项式基的 EXP 插值即变为正定的,并改善了多项式基的插值精度,引入多项式的径向基函数为:

收稿日期:2010-07-13;修订日期:2010-09-03

基金项目:燕山大学博士基金资助项目(B272)

作者简介:夏茂辉(1963-),男,河北秦皇岛人,燕山大学教授,博士,研究方向:无网格法, E-mail:08jk@163.com.

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^m R_i(x) a_i + \sum_{j=1}^n P_j(x) b_j \quad (5)$$

式中: $P_j(x)$ 为空间坐标 $x = [x, y]^T$ 的多项式; b_j 为待定系数; n 为多项式基函数的项数, 为了取得很好的稳定性选取 $n < m$, 其中 $P_j(x)$ 可利用 pascal 三角形获得, 并具备完备的单项式基。

一维基 $P^T(x) = [1, x]$

二维基 $P^T(x) = [1, x, y]$

方程(5)的系数 a_i, b_i 可由方程(5)满足影响域中 n 个离散点的值来得到, 因此有

$$u^e = R_0 a + P_n b \quad (6)$$

式中, $u^e = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$,

$$P_n = \begin{bmatrix} P_1(x_1) & P_2(x_1) & \cdots & P_n(x_1) \\ P_1(x_2) & P_2(x_2) & \cdots & P_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1(x_n) & P_2(x_n) & \cdots & P_n(x_n) \end{bmatrix},$$

式(6)中有 $m+n$ 个未知数, 有 m 个方程, 是一个未定方程组, 对求解上述方程组添加 n 个约束方程

$$P_n^T a = 0 \quad (7)$$

矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} R & P_n \\ P_n^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^e \\ 0 \end{bmatrix},$$

解得: $b = [P_n^T R_0^{-1} P_n]^{-1} P_n^T R_0^{-1} u^e$.

$$a = \{R_0^{-1} - R_0^{-1} P_n [P_n^T R_0^{-1} P_n]^{-1} P_n^T R_0^{-1}\} u^e.$$

将 a, b 代入公式(5)中, 得

$$\begin{aligned} u^h(x) &= [R_1(x), R_2(x), \dots, R_m(x)] \cdot \\ &[R_0^{-1} u^e - R_0^{-1} P_n [P_n^T R_0^{-1} P_n]^{-1} P_n^T R_0^{-1} u^e] + \\ &[P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)] \cdot \\ &\{[P_n^T R_0^{-1} P_n]^{-1} P_n^T R_0^{-1}\} u^e = N(x) u^e \end{aligned} \quad (8)$$

而 $N(x) = [N_1(x), N_2(x), \dots, N_n(x)]$

函数的一阶和二阶导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^h(x)}{\partial x_j} &= \sum_i u^e \frac{\partial N_i(x)}{\partial x_j} = \sum_i u^e h_i(x), \\ \frac{\partial^2 u^h(x)}{\partial x_j^2} &= \sum_i u^e \frac{\partial^2 N_i(x)}{\partial x_j^2} = \sum_i u^e g_i(x). \end{aligned}$$

2 电磁场问题中的离散方程

考虑二维电磁场边值问题

$$\begin{cases} \alpha_x \frac{\partial \phi^2}{\partial x^2} + \alpha_y \frac{\partial \phi^2}{\partial y^2} = -f, & x \in \Omega \\ \phi = \phi_0, & x \in \Gamma_D, \\ \alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y = q, & x \in \Gamma_N \end{cases}$$

式中: ϕ 为待求解位函数; α_x, α_y 是与区域物理性质有关的已知参数; n_x 和 n_y 边界外法线的方向余弦。

在区域 Ω 内, 边界 Γ_D 和 Γ_N 上放置配置点, 并由他们形成插值条件, 使位函数满足相应边值方程, 不妨设基函数总数为 n , 域内和边界上的配点总数为 n , 则插值条件对应的离散方程为

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n u^e g_i(x_i) = -f(x_i), & x_i \in \Omega \\ \sum_{i=1}^n u^e N_i(x_i) = \phi_0, & x_i \in \Gamma_D \\ \sum_{i=1}^n u^e h_i(x_i) = q(x_i), & x_i \in \Gamma_T \end{cases} \quad (9)$$

其矩阵形式为

$$K u^e = f \quad (10)$$

$$K = \begin{bmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & \cdots & g_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(x_j) & g_2(x_j) & \cdots & g_n(x_j) \\ N_1(x_{j+1}) & N_2(x_{j+1}) & \cdots & N_n(x_{j+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1(x_n) & h_2(x_n) & \cdots & h_n(x_n) \end{bmatrix},$$

$$f = [-f(x_1), \dots, -f(x_j), \phi_0(x_{j+1}), \dots, q(x_n)].$$

3 算例

算例 1, 如图 1 所示, 求两无限大平行板间的静电势 ϕ . 一块板位于 $x=0$ 处, $\phi=0$ V; 另一块板位于 $x=1$ 处, $\phi=1$ V. 两块平行板间充满了介电常数为 $\varepsilon(F/m)$ 媒质, 期间的电荷密度是变化的, $\rho(x) = -(x+2)\varepsilon$ C/m². 此问题的精确解为: $\phi(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2 - \frac{1}{6}x$.

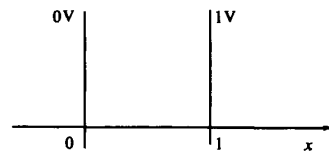


图 1 无限大平行板

Fig. 1 The infinite parallelplate

图 2 给出了用本方法计算时其结果与精确解的比较. 该算例验证了此方法在电磁场问题计算中的可行性与有效性。

算例 2, 如图 3 所示正方形电磁场, 在 $10\text{ m} \times 10\text{ m}$ 的正方形区域均匀分布密度为 $\rho = -100$ C/m² 的自由电荷, 其介电常数为 ε_0 , 区域的上下边界是 Dirichlet 边界且 $\phi=0$ V, 左右边界是 Neumann 边界且 $\frac{\partial \phi}{\partial n}=0$, 该问题的精确解为 $\phi(x, y) =$

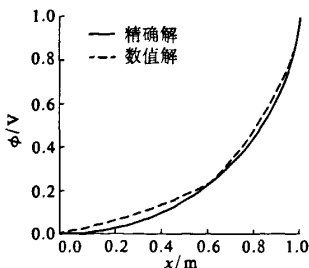


图2 本文方法与精确的比较

Fig.2 Comparison between exact and RPIM

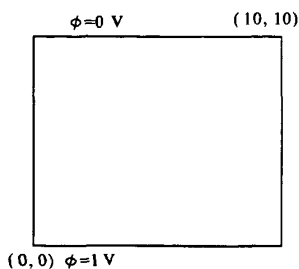


图3 正方形求解域

Fig.3 The square solution domains

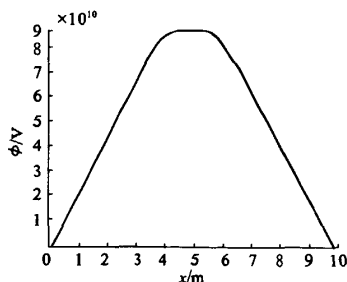


图4 本方法解的绝对误差

Fig.4 The solution of absolute error

$(5y - y^2/2)\rho/\epsilon_0$,用 RPIM 计算时,在正方形区域布置 225(15×15)个规则节点, 14×14 个高斯积分背景网格. 在每个网格内采用 3×3 高斯积分. 图 4 给出了本方法求解的绝对误差. 本方法只取 $x=0$ 的 11 个点来比较.

4 结论

径向点插值无网格方法与有限元方法相比,避免了在系统形成阶段不断划分网格的缺陷,无网格方法只需要一系列离散的点,与伽辽金法相比点插值方法更容易处理边界条件,笔者采用带有多项式的径向基构造插值函数避免了矩阵奇异性问题,也提高了了解的精度.

参考文献:

- [1] LIU G R, GU Y T. 无网格法理论及程序设计[M]. 济南:山东大学出版社,2007.
- [2] BEL Y T, LU Y Y, GU L. Element-free Galerkin method [J]. International Journal for Numerical Method in Engineering, 1994, 37: 229 - 256.
- [3] 金建铭. 电磁场有限元方法[M]. 西安电子科技大学出版社, 2001.
- [4] ZHAI Y N. Element - free Galerkin method in Electromagnetic Field Computation[J]. ICIC Express Letters, 2008, 3(2): 2551 - 2256.
- [5] 尹华杰. 无网格方法及其在电磁场计算中的应用展望[J]. 电机与控制学报, 2003, 7(2): 107 - 102.
- [6] MICCHELLI C A. Interpolation of scattered data: distance matrices and conditionally positive definite functions[J]. Constr Approx, 1986, 2: 11 - 22.

Radial Point Interpolation Meshless Method to Solve the Electro-magnetic Boundary Value Problem

XIA Mao - hui, ZHAI She - xia, LI Hai - long, Yu Ling

(College of Science, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: To effectively solve the coefficient matrix singularity problems and higher calculation accuracy problems in the field of electromagnetic calculation with point interpolation method, in this paper, the radial basis function (RBF) with polynomial interpolation collocation points are applied to the collocation of boundary value problems of electromagnetic field calculation. Using RBF coupling polynomial function structure shape function, the interpolation function has Kronecker Delta function on the essential boundary can be easily. This method is applied to boundary value problem of electromagnetic field of 1 and 2 dimensions. Finally numerical examples show that this method not only has higher calculation accuracy but also can improve the computational efficiency. This method has the broad application prospect in the study of electromagnetic field.

Key words: meshless method; electromagnetic field; boundary value problem; RBF