

文章编号:1671-6833(2011)03-0103-04

基于自适应有限元和 B 样条曲线的结构优化算法

谷胜利^{1,2}, 王复明²

(1. 大连理工大学 水利工程学院, 辽宁 大连 116024; 2. 郑州大学 水利与环境学院, 河南 郑州 450001)

摘要: 基于渐进结构优化算法(ESO)是结合单元误差估计和自适应有限元的结构形状优化算法. 采用 B 样条曲线描述设计域的边界形状, B 样条曲线由作为设计变量的主节点来控制, 设计边界的最优形状通过根据节点的应力水平逐步移动和更新主节点的位置来实现. 采用应力恢复和自适应 FEM 的方法解决 FEM 边界节点应力计算精度低的问题, 提出一种边界主节点更新算法, 将本算法的精度和效率与解析解进行了对比和讨论.

关键词: 渐进结构优化算法; B 样条曲线; 误差估计

中图分类号: O633.11 **文献标志码:** A

0 引言

渐进结构优化算法(ESO)^[1]是一个有效的设计工具, 可用来改进和优化结构的设计. 它基于一个简单的概念, 即: 逐步移除结构中的“低效”材料, 结构将向最优的形状(拓扑)进化^[2]. ESO 算法的优化结果存在网格依赖和棋盘格式, 优化的边界存在锯齿形状, 需要进一步做光滑处理^[3].

最近, 有学者提出了一些处理优化边界的锯齿形状问题的方法, 主要途径有: (1) 采用固定网格法(FG)^[4]. 既有的数值分析包仅需简单修改就可以适应 ESO 的需要. (2) 采用对边界隐式描述的水平集函数法^[5]. (3) 采用对边界直接的显式描述方法. 较易通过移动网格的主节点或边界的控制点来显式修正结构形状(拓扑), 有 4 类方法用来对边界描述: FEM 边界节点、多项式法、Bezier 曲线和 B 样条曲线.

Cervera 和 Trevelyan^[6]提出了一种基于边界元的优化算法, 采用非均匀有理样条曲线(NURBS)描述边界, 优化过程基于应力水平, 低应力和高应力区是潜在的修改区域, 在迭代中, 通过改变边界的定义来实现结构局部区域的“减”或“添”. 采用边界元限制了其方法的适用面.

Hyun 等^[7]在对汽车零件优化时, 采用 B 样条曲线作为边界的描述方法, 提出显式描述法来确定节点的位移. 在此类形状渐进优化算法中, 以

应力标准为例, 确定样条曲线的主节点移动的标准是该节点在整个优化边界的所有主节点中的应力排序. 有限元方法中应力的计算精度较差, 且边界相比内部节点尤其明显. 边界节点应力排序一旦失真, 则优化计算容易失败, 这是问题一. 由主节点应力排序, 确定需要移动的主节点后, 需要进一步确定该节点的移动方向和移动量, 这是问题二.

笔者主要着眼于解决这两个问题, 对于第一个问题, 采用应力恢复和自适应有限元的方法予以解决. 对于第二个问题, 笔者提出了一种新的边界主节点更新算法, 通过对比解析解及文献, 对算法的精度、效率进行评价.

1 形状优化算法

1.1 B 样条曲线

三次 B 样条曲线二阶可导, 有最小的平均曲率, 且稳定, 数值上简单易处理, 笔者采用三次样条曲线来描述设计边界. 沿着设计边界挑选一组节点作为主节点, 主节点作为设计变量, 在形状优化过程中直接重新定位, 而边界上的其他节点则为从节点, 其位置由 B 样条曲线内插确定.

步骤如下: (1) 边界上的节点按照主、从节点进行归类, 端点始终为主节点(如图 1). (2) 主节点的最新位置由形状优化过程确定. (3) 根据主节点构造 B 样条曲线. (4) 主节点间的从节点按照等距内插确定(如图 1). 如此, 边界上的所有节

收稿日期: 2010-11-12; 修订日期: 2011-03-19

作者简介: 谷胜利(1971-), 男, 河南尉氏人, 郑州大学副教授, 主要研究方向为结构无损检测. E-mail: gsl@zhu.edu.cn.

点的维持可得到更新,同时保证设计边界的光滑和连续。

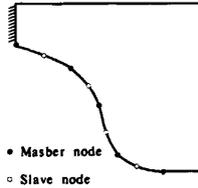


图1 设计边界上的主、从节点

Fig.1 Master nodes and slave nodes on a design boundary

若 FEM 剖分时采用 8 节点 4 边形单元,则角节点可作为主节点,而中节点可作为从节点。

1.2 优化过程

具体优化过程如下:

(1) 定义结构的几何形状.与常规 FEM 类似,施加边界约束条件、荷载等,并定义材料属性。

(2) 定义优化目标 τ 。

(3) 进行首次线性 FEM 分析,该分析提供设计边界上的非零主应力分布。

(4) 通过 SPR 算法,对边界节点应力进行恢复。

(5) 逐个单元计算单元误差指数,如果任何单元的误差指数 η_e 大于预订的值 $\bar{\eta}$,则需要对单元进行重新剖分。

(6) 根据主节点的应力水平计算主节点的移动矢量,从节点位置由 B 样条曲线内插决定。

(7) 重复以上从(3)开始的迭代,直到优化指标 SR 满足:

$$SR \geq \tau \quad (1)$$

1.3 节点应力恢复的 SPR 算法

在优化迭代过程中,边界的最优是通过主节点坐标的移动和更新来逐步实现的,主节点的移动距离由节点应力和边界最大应力之比确定,因此,节点应力的计算精度及最大应力的位置对于优化的效果至关重要,以位移作为求解基本未知数的 FEM 得到的应力是片状连续,且最大应力一般决定优化的迭代过程,而最大应力一般位于边界上,对于 FEM 而言,边界上的应力计算一般精度最差。

最近,一些学者提出采用应力恢复算法来获得较为精确的光滑和连续应力场,其中由 Zienkiewicz 等^[8]提出的 SPR 算法应用较多。笔者也将采用 SPR 算法。

1.4 误差估计和自适应有限元

在优化迭代中,随着主节点坐标的更新,网格常变得扭曲,为防止网格过度扭曲而影响应力的

计算精度,笔者采取自适应有限元方法予以解决。为此,首先定义一个评价网格好坏的指标(即误差指示器,Error estimator)。

笔者采用能量范数形式的单元误差,即

$$E_e = \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\{\sigma^*\} - \{\sigma\})^T [C]^{-1} (\{\sigma^*\} - \{\sigma\}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

式中: $\{\sigma\}$ 为有限元的应力解; $\{\sigma^*\}$ 为光滑处理后的应力场; $[C]$ 为本构矩阵。

总误差为

$$E = \left(\sum_{e=1}^{NE} E_e^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

单元的相对误差为

$$\eta_e = \frac{E_e}{\left[(E^2 + S^2) / NE \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (4)$$

式中:

$$S = \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T [C]^{-1} \sigma d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

$$\Omega = \sum_{e=1}^{NE} \Omega_e \quad (6)$$

一般取 0.05 作为单元相对误差的上限,如果某单元的相对误差大于该上限,则该单元需要重新加密剖分。

1.5 主节点坐标更新标准

笔者采用的主节点坐标更新标准为:任何迭代步中,若某主节点的切向应力 σ_{node} 满足下式,则该节点必须更新其坐标:

$$\sigma_{node} \leq \sigma_{ref} \quad (7)$$

$$\sigma_{ref} = k_{j+1} \cdot \sigma_{max} \quad (8)$$

$$k_{j+1} = k_j + \Delta k_{j+1} \quad (9)$$

式中: σ_{ref} 为参考应力; σ_{node} 为主节点沿着切线方向的应力; σ_{max} 为设计边界上的最大切向应力; k_{j+1} , k_j 分别是第 $(j+1)$ 和 j 次迭代时的参考系数; Δk_{j+1} 是第 $(j+1)$ 次迭代时的参考系数增量。

主节点的移动方向笔者采取垂直于 B 样条曲线,即沿着边界曲线的法向方向 \bar{n} 移动,如图 2 所示。

而节点移动距离则由下式计算:

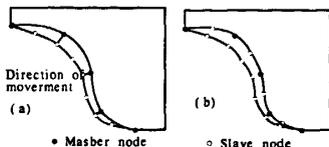
$$d_i = \frac{d_{max} \cdot f |\sigma_{node} - \sigma_{ref}|}{\sigma_{ref}} \quad (9)$$

式中: d_i 是第 i 个主节点的移动距离; f 是标量系数,由试算确定; d_{max} 是主节点的最大移动距离。

1.6 迭代结束标准

笔者选取设计边界上切向应力的最小值与最

大值的比值 SR 作为评价算法实际优化效果的指标,即:



(a) 主节点移动; (b) 从节点内插

图 2 设计边界的更新过程

Fig. 2 Procedure to update the design boundary

$$SR = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \quad (10)$$

式中: $\sigma_{\min}, \sigma_{\max}$ 分别是边界上主节点的最小切向应力和最大切向应力。

显然,若 SR 趋向于 1.0, 则设计边界的切向应力更均匀, 优化效果更佳。一般, 可指定一个值来控制优化迭代是否结束, 笔者取 $\tau = 0.98$ 。在迭代过程中若:

$$SR \geq \tau \quad (11)$$

则可认为优化算法趋于收敛, 迭代结束。

2 算例

将选取双向受力的无限大板中小孔的结构优化算例对笔者的算法进行检验, 材料弹性模量 $E = 2000 \text{ N/mm}^2$, 泊松比为 0.35, 板厚 1 m, 因为对称, 取模型的 1/4 进行分析, 边界和荷载条件如图 3 所示。

本算例的解析解是小孔边界为椭圆形且长短轴之比 b/a 等于荷载比 σ_y/σ_x , 即等于 2.0, 在孔周切向应力均匀分布, 为 7 500 Pa。

本算例中, 主节点的最大切向应力作为参考标准 σ_{ref} 。优化参数设置为: 初始参考系数 $k = 0.70$, 参考系数增量 $\Delta k_{j+1} = 0.2$, 或 $\Delta k_{j+1} = 0, d_{\max} = 0.4, f = 0.5, SR = 0.995$ 。若: $SR_{j+1} \leq SR_j$,

则: $\Delta k_{j+1} = 0.2$, 否则 $\Delta k_{j+1} = 0$ 。

本算例优化需要 46 次迭代。 SR 随迭代步序的变化情况如图 4 所示, 该图表明算法收敛的实现过程。

归一化后的边界应力分布随迭代步序的演变情况如图 5 所示。该图清楚表明, 当趋于最优解时, 孔周应力更趋于均匀, 迭代结束时, SR 为 0.995 4 ($\sigma_{\min}/\sigma_{\max} = 0.794 2 \times 10^4 / 0.797 9 \times 10^4 = 0.995 4$)。孔周应力与解析解的最大误差为 5.88% (如图 6 所示)。数值解得到的椭圆长短轴之比 $b/a = 1.913$ (解析解为 2), 形状误差为 4.3%。以上比较综合说明, 本算法得到的结果与

解析解极其吻合。

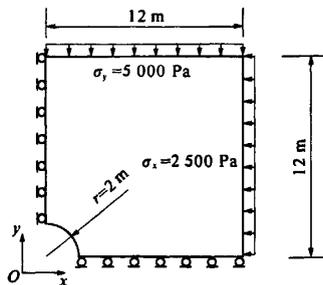


图 3 计算模型

Fig. 3 The calculating model

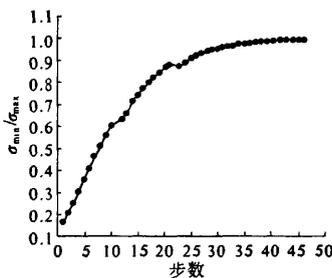


图 4 SR 随迭代步序的演变情况

Fig. 4 Evolution of SR as a function of the loop number

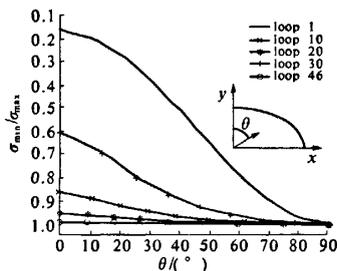


图 5 归一化后的边界应力分布随迭代步序的演变
Fig. 5 Evolution of the normalized tangential stress along the boundary

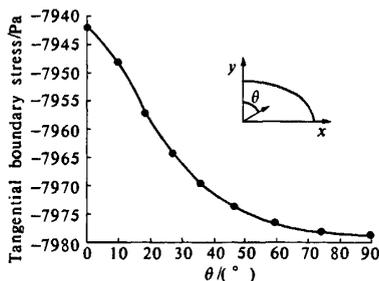


图 6 边界切向应力分布

Fig. 6 Distribution of the tangential boundary stress

3 结论

笔者提出了一种有效的基于常规渐进结构优

化算法并结合单元误差估计和自适应有限元的优化算法,该算法利用 ESO 的思路,并选择 B 样条曲线来描述设计边界,通过逐步移动和更新 B 样条曲线主节点的坐标来达到对结构形状的优化.同时,重点解决了迭代中边界节点应力的计算精度问题,并提出了一种主节点坐标更新的具体算法.通过对本算法优化结果与解析解的比较,表明,本算法的结果精度可靠,且计算效率较高.

参考文献:

- [1] PASI T. The evolutionary structural optimization method: theoretical aspects[J]. *Compute. Methods Appl. Mech. Engrg* 2002, 191: 5485 - 5498.
- [2] LI Wei, LI Qing, STEVEN G P, et al. An evolutionary shape optimization for elastic contact problems subject to multiple load cases [J]. *Compute Methods Appl Mech Engrg*, 2005, 194: 3394 - 3415.
- [3] HINTON E, SIENZ J. Fully stressed topological design of structures using an evolutionary procedure[J]. *Eng Computat*, 1995, 12: 229 - 44.
- [4] KIM H, GARCIA M J, Querin, et al. Introduction of fixed grid in evolutionary structural optimization [J]. *Engrg. Comp* 2000, 17: 427 - 439.
- [5] OSHER S, SETHIAN J A. Front propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton - Jacobi formulations[J]. *J. Comp. Phys*, 1988, 78: 12 - 49.
- [6] CERVERA E, TREVELYAN J. Evolutionary structural optimization based on boundary representation of NURBS. Part I: 2D algorithms [J]. *Computers and Structures*, 2005, 83: 1902 - 1916.
- [7] HYUN S, KIM C, SON J H, et al. An efficient shape optimization method based on FEM and B-spline curves and shaping a torque converter clutch disk [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2004, 40: 1803 - 1815.
- [8] ZIENKIEWICZ O C, ZHU J Z. Superconvergence and the superconvergent patch recovery [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1995, 19: 11 - 23.

Evolutionary Structural Shape Optimization Based on Adaptive FEM and Boundary Representation of B-spline

GU Sheng-li^{1,2}, WANG Fu-ming²

(1. School of Hydraulic Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China; 2. School of Water Conservancy and Environment, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: A structural shape optimization algorithm based on the evolutionary structural optimization (ESO) method in conjunction with element error estimate and adaptive FEM is presented. B-splines are used to describe the boundary of the design domain; the shape of these B-splines is governed by a set of master nodes which can be taken as the design variables. The optimal shape of the design boundary with constant stress is achieved iteratively by the movement and update of the position of the master nodes based on nodal stress leveling. The result quality, in terms of accuracy and efficiency, is tested and discussed with an analytical solution.

Key words: evolutionary structural optimization; B-splines; error estimator