

文章编号:1671-6833(2011)04-0026-04

基于基本解的杂交有限元法计算应力强度因子

郑冠雨¹, 王 辉²

(1. 重庆大学 土木工程学院, 重庆 400030; 2. 河南工业大学 土木建筑学院, 河南 郑州 450052)

摘 要: 含有裂纹的工程结构的应力奇异性表征通常需要借助应力强度因子. 结合位移外推法, 采用基于单元边界积分的杂交有限元法给出了平面 I 型(张开型)裂纹的应力强度因子的计算方法. 解析满足控制方程基本解的线性组合被用来近似表达单元内部的位移场和应力场, 而普通的形函数插值则被用于近似表达单元边界位移场. 二者通过杂交泛函联系起来, 并且泛函中所有单元域积分被完全转化为单元边界积分. 两个典型断裂问题的计算结果显示该方法具有精度高的优点, 可以方便地用于断裂问题的应力强度因子计算.

关键词: 断裂力学; 应力强度因子; 基本解; 杂交有限元法

中图分类号: O343.1 **文献标志码:** A

0 引言

众所周知, 含有裂纹的工程结构的断裂力学分析一直是一个重要问题. 在断裂力学理论中, 应力强度因子(SIF)通常被用于表征线弹性体裂纹尖端附近区域的应力奇异性程度, 因此它的确定是断裂力学的一项重要工作. 但是, 只有极少数断裂力学问题存在解析解, 大部分工程断裂问题都需要借助于数值计算方法才能解决. 目前常用的数值方法主要有有限元法^[1]和边界元法^[2]. 有限元法运算量较为庞大, 而基于边界积分的边界元法则只需要较少的自由度就能达到较高的计算精度. 但边界奇异积分的计算较为复杂, 且由于裂纹尖端应力场的奇异性, 常规边界元法不能直接用于断裂问题分析, 需要发展特殊的边界单元来计算应力强度因子.

基于基本解的杂交有限元法是近年来出现的一种新型数值计算方法^[3-5]. 该方法结合了有限元法和边界元法的优点, 采用基本解的线性组合来近似表达单元内部的位移场和应力场, 使得构造的位移场和应力场能够解析满足控制方程, 从而把杂交泛函中的单元域积分转化为单元边界积分, 降低了计算维数; 在单元边界上, 普通的形函数插值被用于近似单元边界位移分布; 这两种独

立建立的插值场通过杂交泛函联系起来, 与虚边界元法和基本解方法^[6-7]中源点布置类似, 在该杂交有限元法中, 和基本解相关的源点均被布置在单元外部, 因此, 避免了基本解使用过程中的奇异积分问题. 目前, 尚未有人用基于基本解的杂交有限元法来求解断裂问题. 笔者采用杂交有限元法首先计算裂纹张开位移, 然后结合位移外推法计算断裂问题的应力强度因子.

1 杂交有限元法

对平面线弹性问题, 考虑图 1 所示的杂交单元, 占据区域 Ω_e , 其边界为 Γ_e . 在单元内部和边界上采用两种不同的插值方案, 其对应的杂交泛函为^[4]

$$\Pi_{me} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_e^*} \bar{s}_i \bar{u}_i d\Gamma + \int_{\Gamma_e} s_i (\bar{u}_i - u_i) d\Gamma \quad (1)$$

式中: u_i 和 \bar{u}_i 分别为相互独立的单元域内插值场和边界插值场; σ_{ij} 和 ε_{ij} 分别为单元应力和应变; $s_i = \sigma_{ij} n_j$ 是面力分量; Γ_e^* 是给定的单元面力边界; \bar{s}_i 是对应的给定面力; n_j 为边界单位法向余弦.

笔者采用基于基本解的杂交有限元算法中, 单元域内位移、应力和面力被假设为基本解的线性组合, 例如:

收稿日期: 2011-02-19; 修订日期: 2011-04-27

通信作者: 王辉(1976-), 男, 河南洛阳人, 河南工业大学副教授, 博士, 主要从事计算结构力学研究工作, E-mail:

huiwang@huat.edu.cn.

$$\begin{cases} u_i(\mathbf{x}) = c_{km} U_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_m) = N_i \mathbf{c}_e \\ \sigma_{ij}(\mathbf{x}) = c_{km} S_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_m) = T_i \mathbf{c}_e \\ s_i(\mathbf{x}) = c_{km} Q_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_m) = Q_i \mathbf{c}_e \\ (i, j, k = 1, 2; m = 1, 2, \dots, n_s) \end{cases} \quad (2)$$

式中: c_{km} 为未知插值系数; \mathbf{c}_e 为对应的列矢量; U_{ki} 、 S_{kij} 和 Q_{ki} 分别为对应的 Kelvin 位移、应力和面力基本解; N_i 、 T_i 和 Q_i 分别为对应的行矢量; $\mathbf{x} \in \Omega_e$ 为单元内任意点的位置; \mathbf{y}_m 为单元域外源点位置。借鉴基本解法和虚边界元法的处理办法,在笔者提出的杂交有限元法中,源点被放置在和实际单元边界相似的虚边界上来保证计算精度和稳定性。

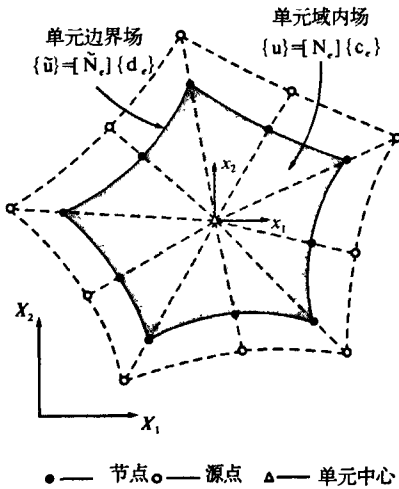


图1 杂交单元示意图

Fig. 1 Illustration of hybrid element

而单元边界位移场则假设为普通的形函数插值

$$\tilde{u}_i(\mathbf{x}) = \tilde{N}_i \mathbf{d}_e \quad \mathbf{x} \in \Gamma_e \quad (3)$$

式中: \tilde{N}_i 和 \mathbf{d}_e 分别为有限元法和边界元法中常用的形函数矢量和未知的单元节点自由度列矢量。

对公式应用高斯散度定理,则可以消除单元域积分,从而得到如下形式的单元边界积分方程

$$\prod_{me} = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_e} s_i u_i d\Gamma - \int_{\Gamma_e} \tilde{s}_i \tilde{u}_i d\Gamma + \int_{\Gamma_e} s_i \tilde{u}_i d\Gamma \quad (4)$$

把单元域内场(2)和单元边界场(3)代入式(4)得到

$$\prod_{me} = -\frac{1}{2} \mathbf{c}_e^T \mathbf{H}_e \mathbf{c}_e - \mathbf{d}_e^T \mathbf{g}_e + \mathbf{c}_e^T \mathbf{G}_e \mathbf{d}_e \quad (5)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{H}_e = \int_{\Gamma_e} \mathbf{Q}^T \mathbf{N} d\Gamma \\ \mathbf{G}_e = \int_{\Gamma_e} \mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{N}} d\Gamma \\ \mathbf{g}_e = \int_{\Gamma_e} \tilde{\mathbf{N}}^T \tilde{\mathbf{s}} d\Gamma \end{cases} \quad (6)$$

为了建立 \mathbf{c}_e 和 \mathbf{d}_e 之间的转换关系并得到刚度方程,对泛函 \prod_{me} 取极值则有

$$\begin{cases} \frac{\partial \prod_{me}}{\partial \mathbf{c}_e^T} = -\mathbf{H}_e \mathbf{c}_e + \mathbf{G}_e \mathbf{d}_e = 0 \\ \frac{\partial \prod_{me}}{\partial \mathbf{d}_e^T} = \mathbf{G}_e^T \mathbf{c}_e - \mathbf{g}_e = 0 \end{cases} \quad (7)$$

从中可以得到 \mathbf{c}_e 和 \mathbf{d}_e 之间的关系式

$$\mathbf{c}_e = \mathbf{H}_e^{-1} \mathbf{G}_e \mathbf{d}_e \quad (8)$$

以及单元刚度方程

$$\mathbf{G}_e^T \mathbf{H}_e^{-1} \mathbf{G}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{g}_e \quad (9)$$

2 位移外推法

根据断裂力学理论知道,对 I 型(张开型)裂纹问题,裂纹尖端的位移场可以用应力强度因子 K_I 表示^[8]

$$\begin{cases} u_1' = \frac{K_I}{2G\sqrt{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[(\kappa - 1) + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ u_2' = \frac{K_I}{2G\sqrt{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[(\kappa + 1) - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \end{cases} \quad (10)$$

式中: r 和 θ 分别为以裂纹尖端为坐标原点的极坐标; G 为剪切弹性模量; κ 为 $3-4\nu$ (平面应变状态)和 $(3-\nu)/(1+\nu)$ (平面应力状态); ν 为泊松比。

从而,应力强度因子可以利用裂纹尖端区域的裂纹上表面 ($\theta = \pi$) 的张开位移表示,表达式如下

$$K_I = \frac{2G}{\kappa + 1} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{r}} u_2' \Big|_{\theta=\pi} \right) \quad (11)$$

利用杂交有限元法,可以很容易确定裂纹的张开位移,从而可以得到一系列的数据对

$$f = \frac{2G}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} u_2' \Big|_{\theta=\pi} \quad (12)$$

利用最小二乘法对数据点进行线性拟合可以得到如下的线性表达式

$$\hat{f}(r) = A_1 r + A_0 \quad (13)$$

从而应力强度因子 K_I 为

$$K_I = A_0 \quad (14)$$

3 数值算例

算例 1 中心裂纹问题 中心裂纹薄板受拉问题是典型的 I 型裂纹问题,如图 2 所示. 由于问题的对称性,取其四分之一进行研究,如图 3 所示. 计算过程中, $h = 2b = 200\text{ mm}$, $a = 20\text{ mm}$, $E = 210\text{ GPa}$, $\nu = 0.25$, $p = 30\text{ MPa}$. 应力强度因子(单位: $\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}}$)的解析解为^[9]

$$\frac{K_I}{p \sqrt{\pi a}} = \left[1 - 0.025 \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 0.06 \left(\frac{a}{b} \right)^4 \right] \sqrt{\sec \frac{\pi a}{2b}} \quad (15)$$

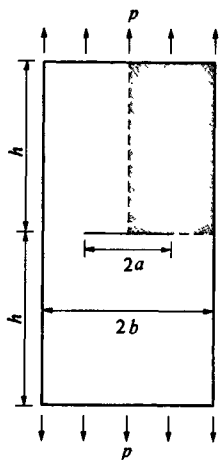


图 2 单向受拉的中心裂纹薄板
Fig.2 Plate with a center crack
subjected to uniform tension

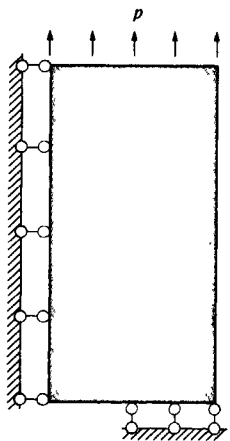


图 3 中心裂纹问题计算模型
Fig.3 Computational model for
center crack problem

为了测试算法的计算精度,两种不同的计算网格(44 个单元和 149 个单元)对应的普通有限元 ABAQUS 计算结果和杂交有限元计算结果如图 4 和表 1 所示. 从中我们发现无论是裂纹张开位移还是应力强度因子,笔者采用的基于基本解

的杂交有限元法在同样网格情况下比普通有限元的计算精度要高,尤其是杂交有限元法可以在稀疏网格下取得相对较高的计算精度.

如果将 (r, f) 的数据对画出,则得到如图 5 所示的曲线. 该曲线表明接近裂纹尖端时, r 和 f 并不满足线性关系,因此,剔除靠近裂纹尖端的数据可以提高计算精度. 如剔除靠近裂纹尖端的 3 个节点后,进行线性拟合得 $K_I = 242.78\text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}}$,和解析解的误差为 0.34%.

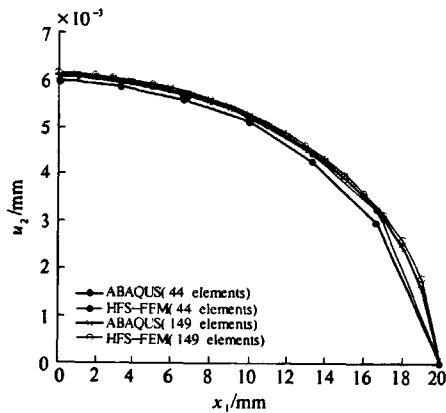


图 4 裂纹张开位移计算结果比较
Fig.4 Numerical comparison of crack
open displacement

表 1 应力强度因子比较 (括号内的数据表示相对误差)
Tab.1 Numerical comparison of SIF (Relative error
is given in parenthesis)

项目	方法	44 个	149 个
		单元	单元
应力 强度 因子	ABAQUS	221.02 (9.27%)	229.61 (5.75%)
	杂交有 限元法	237.64 (2.45%)	239.16 (1.82%)
解析解		243.6	

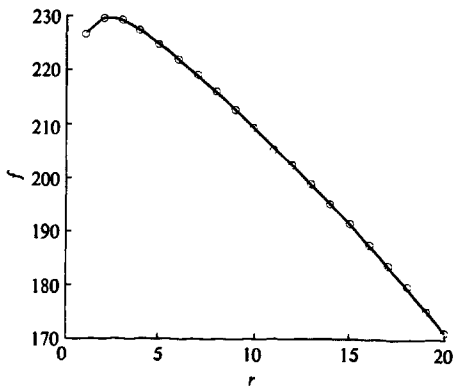


图 5 中心裂纹中 r 和 f 的关系曲线
Fig.5 Relationship of r and f in
center crack problem

算例2 单边裂纹问题 单边裂纹薄板受拉问题也属于I型裂纹问题,如图6所示.由于问题的对称性,取其二分之一进行研究,如图7所示.计算过程中,几何参数和材料参数同算例1.此时,应力强度因子的解析解为^[9]

$$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi a}} = 1.12 - 0.231 \frac{a}{b} + 10.55 \left(\frac{a}{b} \right)^2 - 21.72 \left(\frac{a}{b} \right)^3 + 30.39 \left(\frac{a}{b} \right)^4 \quad (16)$$

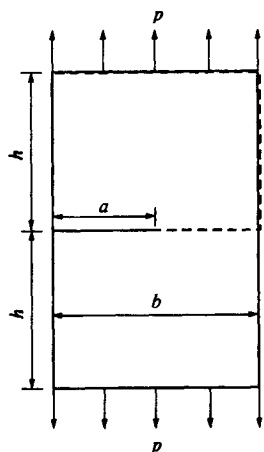


图6 单向受拉的单边裂纹薄板

Fig.6 Plate with a single-edge crack subjected to uniform tension

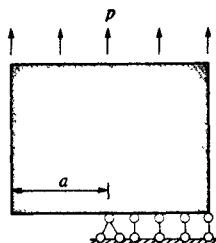


图7 单边裂纹问题计算模型

Fig.7 Computational model for single-edge crack problem

采用149个单元时的 (r, f) 关系曲线如图8所示.该曲线表明相对于中心裂纹,单边裂纹尖端的应力奇异性更强,在接近裂纹尖端的时候, r 和 f 并不满足线性关系,同样,受外边界干扰效应影响,在靠近外边界的区域 r 和 f 也不满足线性关系,因此,剔除靠近裂纹尖端的数据可以提高计算精度.如剔除靠近裂纹尖端和靠近外边界的部分节点后,进行线性拟合,得 $K_I = 316.45 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}}$,和解析解的误差为2.89%.

4 结论

笔者基于平面线弹性 Kelvin 基本解,提出了

单元边界积分型杂交有限元计算模型,并结合位移外推法计算了平面I型裂纹问题的应力强度因子,对算法的计算精度和拟合点的选取进行了分析,和普通有限元法的计算结果进行了对比.计算结果表明,无论是裂纹张开位移还是应力强度因子,笔者采用的杂交有限元法在同样网格情况下比普通有限元的计算精度要高,尤其是杂交有限

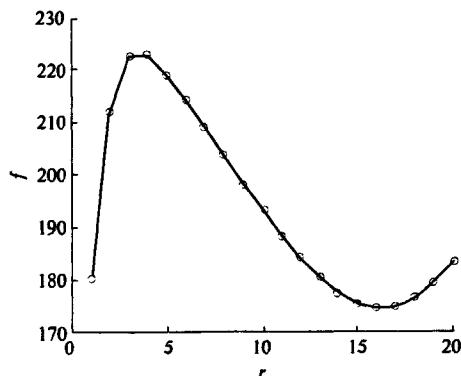


图8 单边裂纹中和的关系曲线

Fig.8 Relationship of r and f in single-edge crack problem

元法可以在稀疏网格下取得相对较高的计算精度.笔者的工作不仅拓宽了杂交有限元法的应用领域,也为断裂力学中应力强度因子的计算提供了一条新的途径.

参考文献:

- [1] 解德, 钱勤, 李长安. 断裂力学中的数值计算方法及工程应用[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [2] 黎在良. 断裂力学中的边界数值方法[M]. 北京: 地震出版社, 1996.
- [3] WANG H, QIN Q H. Hybrid fem with fundamental solutions as trial functions for heat conduction simulation [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2009, 22: 487-498.
- [4] WANG H, QIN Q H. Fundamental-solution-based finite element model for plane orthotropic elastic bodies [J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2010, 29: 801-809.
- [5] WANG H, QIN Q H. FE approach with Green's function as internal trial function for simulating bioheat transfer in the human eye [J]. Archives of Mechanics, 2010, 62: 493-510.
- [6] 苏成, 郑淳. 应力强度因子计算的样条虚边界元法[J]. 工程力学, 2007, 24(8): 49-53.
- [7] KARAGEORGHIS A, POULLIKKAS A, BERGER J R. Stress intensity factor computation using the method

(下转第51页)

Research and Application of Intelligent Control in the Process of Directional Drilling

GUO Bing^{1,2}, HUANG Jia-jun²

(1. Civil Engineering and Architecture Department, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430070, China; 2. Civil Engineering Department, Xinxiang College, Xinxiang 453003, China)

Abstract: In the process of directional drilling of underground pipeline, optimizing the drilling parameters of a bit is the key issues to achieve drilling automation and intelligentialization. A data base should be first established, based on the study of the engineering location's geological conditios, the underground pipeline types and distribution. It can provide different types of basic digital data, like knowledge, logic and number parameters. Under the control of actual soil characteristics, drilling depth, angles, speed, pushing force and the state of drilling liquid, risks of construction can be effectively avoided and the economic and social benefits of underground pipeline directional drilling can be dramatically raised.

Key words: directional, drilling, intelligentialization, control, parameter, informatization

(上接第29页)

of fundamental solutions[J]. Computational Mechanics, 2006, 37: 445 - 454.

[8] 陆毅中. 工程断裂力学[M]. 西安: 西安交通大学

出版社, 1987.

[9] TADA H, PARIS P C, IRWIN G. The stress analysis of cracks handbook [M]. Paris Production Inc, 1985.

Calculation of Stress Intensity Factor by Hybrid Finite Element Method Based on Fundamental Solutions Kernels

ZHENG Guan-yu¹, WANG Hui²

(1. School of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400030, China; 2. School of civil Engineering and Architecture, Henan University of Technology, Zhengzhou 450052, China)

Abstract: Stress intensity factor is usually used to represent the stress singularity at tips of cracks embedded in engineering structures. With the displacement extrapolation method, the element-boundary integration-based hybrid finite element model is developed in the paper to determine the stress intensity factor for I-type cracks. In the hybrid formulation, the combination of fundamental solutions is used to approximate the element interior displacement and stress fields, while the conventional shape functions are employed to construct the element frame displacement fields. These two independent fields are linked by the hybrid functional and the element domain integral in the functional is converted to element boundary integral. Numerical examples show that the proposed hybrid method has good accuracy and can be used to analyze the crack problems.

Key words: fracture mechanics; stress intensity factor; fundamental solution; hybrid finite element method