文章编号:1671-6833(2011)06-0126-03

解单调算子零点的 Halpern 方法的一个收敛率

董云达[1],黄元元[2],周书芳[1]

(1. 郑州大学 数学系,河南 郑州 450001; 2. 西安电子科技大学 理学院,陕西 西安 710071)

摘 要:研究解极大单调算子零点的 Halpern 方法. 如果该算子的逆在原点处是 Lipschitz 连续的,并且有关参数适当选取的话,首次给出了该方法的一个收敛率.

关键词:单调算子;Halpern 方法;邻点算法;收敛率

中图分类号: O221.2 **文献标志码**: A

0 引言

设 H 为实的 Hilbert 空间,$T:H\to H$ 为极大单调算子. 考虑下面的极大单调包含问题:找 $x\in H$ 使得

$$0\in T(x). \tag{1}$$

邻点算法[1]是解决此问题的一个经典方法. 在图像处理、非线性振荡器行为分析中,它是设计与分析某些实用快速迭代算法的基础.

但是,在无穷维的 Hilbert 空间中,邻点算法所产生的序列却可能是弱收敛的. 为了克服这一弱点,Kamimula 和 Takahashi[2] 建议利用 Halpern 方法[3]来求解这个问题. 任取 $u\in H$ 和初始点 $x_1\in H$,相应的 Halpern 方法的一般迭代格式为:

$$0\in y_n-x_n+\lambda_n T(y_n),$$
$$x_{n+1}=\alpha_n u+(1-\alpha_n)y_n,$$

其中 $\lambda_n\in(0,+\infty)$,$\alpha_n\in[0,1)$. 注意当 $\alpha_n=0$ 时,Halpern 方法即为邻点算法. 而且,他们还给出了能够保证该方法强收敛性的一组条件:(1) $u=x_1$;(2) 序列 $\{\alpha_n\}$ 是不可和的,并且它的极限为 0;(3) 序列 $\{\lambda_n\}$ 的极限为 $+\infty$.

最近,Zhou 等[4]提出不精确 Halpern 方法,它的基本迭代格式为:

$$0\in y_n-x_n+\lambda_n T(y_n)+e_n,$$
$$x_{n+1}=\alpha_n u+(1-\alpha_n)(y_n+e_n),$$

式中:e_n 是一个误差项.

那么,如何估计这个不精确 Halpern 方法的收敛率呢?

笔者借用了文献[5]中的某些技巧,从而证明了:如果 T 的逆 T^{-1} 在原点处是 Lipschitz 连续的[1](不妨记 T 的唯一零点为 z),并且相应的参数 α_n 与 λ_n 适当选取的话,那么一定存在一个正数 $C>0$ 和一个足够大的自然数 K 使得:

$$\min_{n>K}\{\|x_n-z\|\}\leqslant\frac{C}{\sqrt{n-K+1}}\to 0, \text{当 } n\to+\infty,$$

其中 $\|\cdot\|$ 为 Hilbert 空间中内积 $\langle x,y\rangle$ 所诱导的范数 $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$. 这是 Halpern 方法的第一个收敛率估计.

1 预备知识

在这一节中,先给出一个有用的定义,然后给出并证明一个重要的引理.

定义 1.1 如果算子 $T^{-1}:H\to H$ 的零点存在且唯一,设为 z,并且存在 $L>0,\delta>0$,使得

$$\|x-z\|\leqslant L\|w\|, \text{其中 } x\in T^{-1}(w),\ \|w\|\leqslant\delta.$$

则称算子 T 在原点处是 Lipschitz 连续的. 进一步的讨论参见文献[5-6].

引理 1.1 任取 $\alpha\in[0,1]$,$\lambda\in(0,+\infty)$. 假设

$$0\in y-x+\lambda T(y)+e, \tag{2}$$
$$\tilde{x}=\alpha u+(1-\alpha)(y+e), \tag{3}$$

其中 $\|e\|\leqslant\sigma\ \|x-y\|$,$\sigma\in[0,1)$. 则有下列不等式成立

(a) $\|y+e-z\|^2\leqslant\|x-z\|^2-\|x-y\|^2+\|e\|^2$
$$\leqslant\|x-z\|^2-(1-\sigma^2)\|x-y\|^2; \tag{4}$$

(b) $\|\tilde{x}-z\|^2\leqslant\|x-z\|^2-(1-\sigma^2)\|x-y\|^2$
$+2\alpha\langle u-z,y+e-z\rangle+\alpha^2(\|u-z\|^2-2\langle u$

收稿日期:2011-06-28;修回日期:2011-09-09
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10702065)
作者简介:董云达(1969-),男,河南原阳人,郑州大学副教授,研究方向:数学规划,E-mail:ydong@zzu.edu.cn.

$-z,y+e-z\rangle)$.

证明:(a)可由[4,引理2.3]和 $\|e\|\leqslant\sigma\|x-y\|$,$\sigma\in[0,1)$ 直接得到. 下面我们仅证(b)部分. 由(3)可知

$\|\tilde{x}-z\|^2=\|\alpha(u-z)+(1-\alpha)(y+e-z)\|^2=(1-\alpha)^2\|y+e-z\|^2+2\alpha(1-\alpha)\langle u-z,y+e-z\rangle+\alpha^2\|u-z\|^2\leqslant\|y+e-z\|^2+2\alpha\langle u-z,y+e-z\rangle+\alpha^2(\|u-z\|^2-2\langle u-z,y+e-z\rangle)\leqslant\|x-z\|^2-(1-\sigma^2)\|x-y\|^2+2\alpha\langle u-z,y+e-z\rangle+\alpha^2(\|u-z\|^2-2\langle u-z,y+e-z\rangle)$.

最后一个不等式利用了关系式(4),这样,我们就完成了这个引理的证明.

2 主要结果

在这一节中,主要研究不精确 Halpern 方法的收敛率.

不精确 Halpern 方法[4]:选取 $\alpha_n\in[0,1]$,$\lambda_n\in(0,+\infty)$,$\sigma\in[0,1)$,$\varepsilon_n\downarrow 0$. 任取 $x_1\in H$, $u\in H$, 序列$\{x_n\}$由下列迭代格式生成:

$$0\in y_n-x_n+\lambda_nT(y_n)+e_n, \tag{5}$$

$$x_{n+1}=\alpha_nu+(1-\alpha_n)(y_n+e_n), \tag{6}$$

并且,$\|e_n\|\leqslant\sigma\min\{\|x_n-y_n\|,\varepsilon_n\}$. (7)

下面我们给出并证明本研究的主要结果.

定理 2.1　对于不精确 Halpern 方法所产生的序列$\{x_n\}$来说,若(1)T^{-1}在原点处是 Lipschitz 连续的;(2)序列$\{\alpha_n\}$是不可和的,并且$\sum\alpha_n^p<+\infty,p\in(1,2)$;(3)$\lim\lambda_n=+\infty$,则一定存在一个正数 $C>0$ 和一个足够大的自然数 K 使得:

$$\min_{n>K}\{\|x_n-z\|\}\leqslant\frac{C}{\sqrt{n-K+1}}\to 0,\quad n\to+\infty$$

.

证明:由式(5)、(6)、(7)和引理 1.1 有

$$\|x_{n+1}-z\|^2\leqslant\|x_n-z\|^2-(1-\sigma^2)\|x_n-y_n\|^2+2\alpha_n\langle u-z,y_n+e_n-z\rangle+\alpha_n^2(\|u-z\|^2-2\langle u-z,y_n+e_n-z\rangle). \tag{8}$$

现在我们证 $2\alpha_n\langle u-z,y_n+e_n-z\rangle$有界. 首先我们给出 $\|y_n-z\|$ 的一个上界. 由式(5)有

$$y_n\in T^{-1}(\frac{x_n-y_n-e_n}{\lambda_n}).$$

由(7)和假设(2)(3),依照[4]的证明,我们知道$\{x_n\}$,$\{y_n\}$和$\{e_n\}$都是有界的. 因 $\lim\lambda_n=+\infty$,则一定存在一个自然数 K_1,使得当 $n>K_1$ 时,下面的不等式:

$$\|\frac{x_n-y_n-e_n}{\lambda_n}\|\leqslant\delta$$

成立. 根据 T^{-1}在原点处的 Lipschitz 连续性:

$$\|y_n-z\|\leqslant L\|\frac{x_n-y_n-e_n}{\lambda_n}\|.$$

再由误差准则(7),我们可以得到

$$\|y_n-z\|\leqslant\frac{L}{\lambda_n}(\|x_n-y_n\|+\|e_n\|)$$

$$\leqslant\frac{L}{\lambda_n}(1+\sigma)\|x_n-y_n\|. \tag{9}$$

所以当 $n>K_1$ 时,我们有

$$2\alpha_n\langle u-z,y_n+e_n-z\rangle$$
$$\leqslant 2\alpha_n\|u-z\|\ \|y_n+e_n-z\|\ \leqslant 2\alpha_n\|u-z\|(\|y_n-z\|+\|e_n\|)$$
$$\leqslant 2\alpha_n\|u-z\|(\frac{L}{\lambda_n}(1+\sigma)+\sigma)\|x_n-y_n\|$$
$$=2\alpha_n(\frac{L}{\lambda_n}(1+\sigma)+\sigma)\|u-z\|\ \|x_n-y_n\|.$$

因为 $\lim\lambda_n=+\infty,\sigma<1$,则存在 $K_2\geqslant K_1$,使得当 $n>K_2$ 时

$$2\alpha_n\langle u-z,y_n+e_n-z\rangle\leqslant 2\cdot 2\alpha_n\|u-z\|\ \|x_n-y_n\|\leqslant 2(\alpha_n^{2-p}\|x_n-y_n\|^2+\alpha_n^p\|u-z\|^2).$$

将此不等式代入式(8)得

$$\|x_{n+1}-z\|^2\leqslant\|x_n-z\|^2-(1-\sigma^2-2\alpha_n^{2-p})\|x_n-y_n\|^2+\alpha_n^p\tau_n. \tag{10}$$

其中 $\tau_n=\alpha_n^{2-p}(\|u-z\|^2-2\langle u-z,y_n+e_n-z\rangle)+2\|u-z\|^2$.

由式(9)我们有

$$\|x_n-z\|\leqslant\|x_n-y_n\|+\|y_n-z\|$$
$$\leqslant(1+\frac{L}{\lambda_n}(1+\sigma))\|x_n-y_n\|.$$

这样,将此不等式代入式(10)便可得到:

$$\|x_{n+1}-z\|^2\leqslant(1-\frac{(1-\sigma^2-2\alpha_n^{2-p})}{(1+\frac{L}{\lambda_n}(1+\sigma))^2})\|x_n-z\|^2+\alpha_n^p\tau_n.$$

又因为 $\lim\alpha_n=0$,且 $\lim\lambda_n=+\infty$,则存在 $\mu\in(0,1)$,$M\in(0,+\infty)$和 $K\geqslant K_2$,当 $n>K$ 时并且 $1-\sigma^2-2\alpha_n^{2-p}\geqslant\mu(1+\frac{L}{\lambda_n}(1+\sigma))^2$, $\tau_n\leqslant M$.

从而,当 $n>K$ 时,下面的不等式必然成立

$$\|x_{n+1}-z\|^2\leqslant(1-\mu)\|x_n-z\|^2+\alpha_n^pM.$$

由此可得

$$\|x_{n+1}-z^2\leqslant\|x_K-z\|^2-\mu\sum_{i=K}^{n}\|x_i-z\|^2+$$

$M\sum_{i=K}^{n}\alpha_i^p$. 显然,$\min_{K\leqslant i\leqslant n}\{\|x_i-z\|^2\}$ 的值不会超过

$$\frac{1}{\mu(n-K+1)}(\|x_K-z\|^2+M\sum_{i=K}^{n}\alpha_i^p). \tag{11}$$

从假设(2)可知,只要选一个适当的正数 C,我们要证明的结果就可以成立. 证毕.

注意:假设条件(2)包含 $\alpha_n=n^{-1}$这种情形,却排除了 $\alpha_n=n^{-1/2}$这一情形,然而由(11)直接计算,我们仍然可以得到 Halpern 方法的另一个收敛率,尽管收敛速度较前一种情况要慢. 另外,值得指出的是,我们的分析手法也适用于最新发展的邻近下降算法,由于推导十分相似,也就不再赘述了。

参考文献:

[1] ROCKAFELLAR R T. Monotone operators and the proximal point algorithm [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1976, 14: 877 - 898.

[2] KAMIMURA S, TAKAHASHI W. Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces [J], Journal of Approximation Theory, 2000, 106(2): 226 - 240.

[3] HALPERN B. Fixed points of nonexpanding maps [J]. Bulletin of American Mathematics Society, 1967, 73(6): 957 - 961.

[4] ZHOU Hai-yun, Wei Li, Tan Bin. Convergence theorems of approximate PPA for zeroes of maximal monotone operators in Hilbert spaces [J]. International Journal of Mathematical Analysis, 2007, 1(4): 175 - 186.

[5] DONG Yun-da. An extension of Luque's growth condition [J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22 (9): 1390 - 1393.

[6] LUQUE F J. Asymptotic convergence analysis of the proximal point algorithm [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1984, 22(2): 277 - 293.

A Convergence Rate of Halpern Method for A Zero of Monotone Operator

DONG Yun-da[1], HUANG Yuan-yuan[2], ZHOU Shu-fang[1]

(1. Department of Mathematics, Zhengzhou University , Zhengzhou 450001, China; 2. School of Sciences, Xidian University, Xi' an 710071, China)

Abstract: A Halpern method for finding a zero of a maximal monotone operator is investigated. The first convergence rate is given provided that the associated inversion operator is Lipschitz continuous at the origin and the involved parameters are properly chosen.

Key words: monotone operator; Halpern method; proximal point algorithm; convergence rate