

# 一种新的非线性非高斯信号分离方法

王忠勇<sup>1</sup>, 李响<sup>1</sup>, 王行业<sup>1</sup>, 段琳琳<sup>1,2</sup>

(1. 郑州大学 信息工程学院, 河南 郑州 450001; 2. 解放军信息工程大学 理学院, 河南 郑州 450001)

**摘要:** 提出一种基于粒子滤波的非线性非高斯信号分离方法. 该方法依据状态空间模型把信号分离问题转化为信号的状态和参数的联合估计问题, 利用粒子滤波方法, 结合核平滑收缩技术拟合系统未知参数后验分布, 以实现非线性系统中多路信号的分离. 仿真结果表明, 与现有分离算法相比, 该方法能有效解决非线性非高斯系统中多路信号的分离问题, 并提高未知参数的估计精度.

**关键词:** 粒子滤波; 非线性非高斯信号; 信号分离; 核平滑收缩

**中图分类号:** TN911.7 **文献标志码:** A **doi:**10.3969/j.issn.1671-6833.2012.02.001

## 0 引言

随着非线性科学的发展, 信号分离成为当今信息处理领域的热门课题<sup>[1-2]</sup>. 在信号分离中, 需要根据系统观测数据以及先验估计信息, 通过一定算法计算出所需估计量. 当系统参数未知时, 还需同时估计系统的状态和参数, 从而实现多路信号的分离. 经典的扩展卡尔曼滤波算法是解决此类问题的常用方法<sup>[3]</sup>, 但在处理非线性非高斯对象时, 该方法就会出现较大偏差.

粒子滤波(Particle Filtering: PF)<sup>[4]</sup>是一种蒙特卡罗(Monte Carlo)方法, 在处理非线性非高斯系统中参数估计和状态滤波问题上具有不可替代的优势<sup>[5-7]</sup>, 近年来受到广泛的关注. 研究参数未知信号分离问题, 可以把混合信号和系统参数看成一组高维状态, 根据贝叶斯理论, 该状态的联合后验密度概率函数包含该状态所有信息. 笔者在PF算法基础上采用标准贝塔分布的核平滑收缩技术避免非时变参数粒子退化. 仿真结果表明, 本文算法能有效实现非线性非高斯信号的分离.

## 1 问题的提出

由于接收信号不仅包含所需信号和加性噪声, 而且还包括其他有用信号, 这就需要去除加性噪声同时恢复各路有用信号.

目前大量信号分离算法的研究对象是基于线

性系统、高斯假设的<sup>[1-2]</sup>, 然而在实际中, 信号的混合方式不再是简单的线性高斯混合, 于是研究非线性非高斯系统的信号分离更具有应用价值. EKF(扩展卡尔曼滤波)和UKF(无味卡尔曼滤波)方法<sup>[3]</sup>把非线性问题线性化, 在高斯噪声情况下, 可以获得较好的信号分离性能, 然而对于非高斯噪声, 该方法性能会严重恶化. 刘凯等<sup>[8]</sup>利用PF算法对含非高斯噪声的线性系统进行信号分离, 但非线性系统在实际中有更广泛的应用. 笔者拟采用PF方法和核平滑收缩技术研究非线性系统的信号分离问题, 提高粒子采样率, 使信号精确分离.

假设接收信号 $y_k$ 由 $L$ 个混合信号 $x = \{x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^L\}$ 组成. 在参数未知时, 含有过程噪声 $w_k^i$ 和观测噪声 $v_k$ 的信号分离动态系统的状态空间模型可以描述为

$$x_k^i = f^i(x_{k-1}^i, \theta_{k-1}^i) + w_k^i; \quad (1)$$

$$y_k = h(A(x)) + v_k. \quad (2)$$

式中:  $f^i(\cdot)$ 表示第 $i$ 个动力学方程;  $x_k^i$ 表示第 $i$ 路信号在 $k$ 时刻的状态;  $\theta_k^i$ 为系统未知参数(这里考虑的参数为非时变参数, 即 $\theta_k^i = \theta_{k-1}^i$ );  $A$ 为混合向量;  $h(\cdot)$ 是一个可微分的非线性函数;  $v_k$ 是均值为0, 方差为 $\sigma^2$ 的背景噪声.

研究的问题可归结为: 在上述状态空间模型下, 由接收到的信号序列 $y_{1:k} = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ 递

收稿日期: 2011-10-12; 修订日期: 2011-12-28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61172086)

作者简介: 王忠勇(1965-), 男, 江西遂川人, 郑州大学教授, 博士, 博士生导师, 主要从事信息处理、控制理论与应用研究, E-mail: iczywang@zzu.edu.cn.

推估计联合状态  $z_k^i = \{x_k^i, \theta_k^i\}$ .

## 2 基于粒子滤波的盲分离算法

对于未知参数的信号分离问题,欲分离多路信号则必须先估计出未知参数.笔者用核平滑收缩技术产生参数估计粒子,再利用PF方法对参数估计粒子对应的信号状态抽样产生状态粒子集,最终完成多路信号的参数和状态分离.

### 2.1 粒子滤波原理

PF适用于任何能用状态空间模型描述的系统.该算法核心思想是利用从状态后验分布  $p(z_{1:k}|y_{1:k})$  中抽取的离散样本点  $\{z_{1:k}^i, \omega_{1:k}^i\}$  来近似状态后验分布,把积分运算转化为求和运算.通常很难直接从  $p(z_{1:k}|y_{1:k})$  中抽样产生粒子,因此需引入一个便于抽样的已知分布,即重要性函数  $q(z_{1:k}|y_{1:k})$ . 定义重要性权重为

$$\hat{\omega}_k^i \propto \frac{p(z_{1:k}^i|y_{1:k})}{q(z_{1:k}^i|y_{1:k})}, \quad (3)$$

联合后验密度概率可近似估计为

$$p(z_{1:k}|y_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N \omega_k^i \delta(z_{1:k} - z_{1:k}^i). \quad (4)$$

假设重要性函数可以分解为

$$q(z_{1:k}|y_{1:k}) = q(z_{1:k-1}|y_{1:k-1})q(z_k|y_{1:k}, z_{1:k-1}), \quad (5)$$

此时重要性权重可表示为

$$\hat{\omega}_k^i \propto \hat{\omega}_{k-1}^i \frac{p(y_k|z_k^i)p(z_k^i|z_{k-1}^i)}{q(z_k|y_{1:k}, z_{1:k-1})}. \quad (6)$$

当选取状态转移函数  $p(z_k|z_{k-1})$  为重要性函数时,由式(3)~(6)重要性权重可简化为

$$\omega_k^i = \omega_{k-1}^i p(y_k|z_{k-1}^i). \quad (7)$$

在参数未知的情况下,需要利用  $p(z_k|z_{k-1})$  同时实现参数粒子和状态粒子的更新,即

$$p(z_k|z_{k-1}) = p(\theta_k|\theta_{k-1})p(x_k|\theta_{k-1}, x_{k-1}). \quad (8)$$

### 2.2 参数核平滑收缩技术

由于粒子滤波进行非时变参数估计时会出现无法增加参数粒子多样性的问题,导致参数粒子退化,从而影响参数估计的精度,于是如何避免信息丢失是解决参数粒子退化的关键问题.

对于非时变参数估计,亟须解决参数后验分布  $p(\theta_k|\theta_{k-1}, y_{0:k})$  的近似问题. West 提出基于自适应重要性抽样的核平滑方法<sup>[9]</sup>:假设在  $k-1$  时刻,参数粒子及重要性权重分别为  $\theta_{k-1}^i$  和  $\omega_{k-1}^i$ ,则当前时刻参数后验分布可用核平滑概率近似:

$$p(\theta_k^i|\theta_{k-1}^i, y_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N \omega_{k-1}^i \kappa_{k-1}^i(\theta). \quad (9)$$

式中:  $\kappa_{k-1}^i(\cdot) = \kappa(\cdot|\hat{\theta}_{k-1}^i, \sigma_{\theta,k-1}^2)$  是均值为

$\hat{\theta}_{k-1}^i$ , 方差为  $\sigma_{\theta,k-1}^2$  的核分布. 核分布有众多可选择的方法,传统的选择是高斯分布,但存在拖尾较长,采样效率低的问题.为提高采样效率,笔者采用标准贝塔分布对参数粒子进行采样更新.由于核中心位于已经存在的粒子轨道点,导致产生参数粒子  $\theta_k^i$  方差  $(1+h^2)\sigma^2$  总是大于  $\sigma^2$ , 其中  $h$  为平滑参数,通常选取  $h=0.1$ . 为修正这个问题,文献[9]采用收缩方法保证信息的完整性,即:

$$\hat{\theta}_{k-1}^i = a\theta_{k-1}^i + (1-a)\bar{\theta}_{k-1}; \quad (10)$$

$$\sigma_{\theta,k-1}^2 = h^2 \sum_{i=1}^N (\theta_{k-1}^i - \bar{\theta}_{k-1})^2 \omega_{k-1}^i. \quad (11)$$

式中:  $\bar{\theta}_{k-1} = \sum_{i=1}^N \theta_{k-1}^i \omega_{k-1}^i$ , 表示  $k-1$  时刻参数的加权平均值;  $a = \sqrt{1-h^2}$ .

此时  $p(\theta_k|\theta_{k-1}, y_{0:k})$  的均值、方差与  $k-1$  时刻保持一致,从而避免参数粒子退化,保证信息完整性.

### 2.3 基于粒子滤波的信号分离

通过上面的阐述可以看出:研究参数未知情况的信号分离问题,需在核平滑收缩技术保证参数粒子信息完整性的同时采用核分布为贝塔分布的核函数,从而提高参数粒子的采样效率和估计的准确性.在此基础上可抽样产生状态估计所需要的状态粒子集,最终完成多路信号的分离.

设  $k=1, \dots, M$ , 针对式(1)和(2)的非线性系统,给出未知参数的信号分离算法,步骤如下:

步骤1 初始化:由初始分布  $p(x_0, \theta_0)$  抽样得到  $x_0^i, \theta_0^i, i=1, \dots, N$ .

步骤2 参数和状态更新:由式(10)、(11)得到  $k-1$  时刻参数粒子满足的均值和方差,并由式(2)更新状态粒子.

步骤3 权重更新:根据式(7)计算每个粒子的重要性权重,并归一化:

$$\bar{\omega}_k^i = \omega_k^i / \sum_{j=1}^N \omega_k^j. \quad (12)$$

步骤4 重采样:消除重要性权重较小的粒子,复制权重较大的粒子,得到新的状态粒子.

步骤5 计算  $k$  时刻参数估计值  $\hat{\theta}_k = \sum_{i=1}^N \theta_k^i \bar{\omega}_k^i$ ; 状态估计值  $\hat{x}_k = \sum_{i=1}^N x_k^i \bar{\omega}_k^i$ .

步骤6  $k < M$  时,  $k = k+1$ , 转到步骤2;  $k \geq M$  时, 循环结束.

## 3 仿真性能与分析

Wan 和 Nelson 在其文献[3]中提出用

DEKF(双重卡尔曼滤波)方法分离混合信号,由于该方法能够有效去除系统噪声并分离出各路信号,在信号处理领域被广泛引用.针对非线性系统的情况,为了验证算法的有效性,笔者将本文算法与该文献算法进行了比较,对两路混合信号进行分离试验.

### 3.1 仿真模型

假设观测量  $y_k$  由以下非线性系统状态空间模型产生:

$$x_k^1 = 1 + \sin[0.04\pi(k-1)] + \theta^1 x_{k-1}^1 + w_k^1;$$

$$x_k^2 = 1 + \sin[0.04\pi(k-1)] + \theta^2 x_{k-1}^2 + w_k^2;$$

$$y_k = 1.4(x_k^1)^2 + 0.2(x_k^2)^2 + v_k.$$

式中:  $w_k^i$  服从  $\gamma$  分布  $w_k^i \sim \zeta(3, 2)$ ;  $v_k \sim N(0, 1)$ .

设  $\theta^i \sim [0, 1]$ , 且  $\theta^1, \theta^2$  的真实值分别为 0.5 和 0.3. 在仿真中,分别使用 PF 和 DEKF 方法对该系统进行信号分离.在粒子滤波方法中,实验粒子  $N = 500$ . 为了对分离结果定量分析,定义单次试验的经验性标准偏差为

$$\text{RMSE} = \left| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^M (\hat{x}_k^i - x_k^i)^2 \right|^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

### 3.2 仿真结果及分析

图 1 给出两种算法进行 20 次蒙特卡洛实验获得的参数估计平均值,这里设定观测时间  $k = 2000$ .

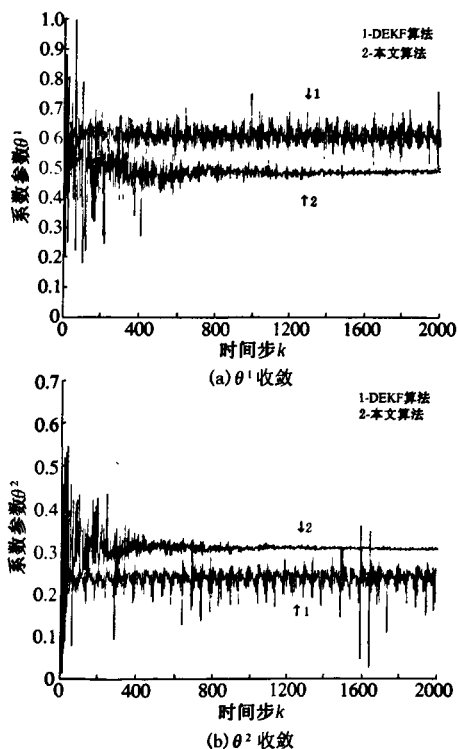


图 1 系统参数  $\theta^1, \theta^2$  的收敛情况

Fig. 1 The convergence of the parameters  $\theta^1, \theta^2$

结果表明,利用本文算法得到的系统参数估计值收敛于正确值 0.5 和 0.3,而 DEKF 算法的系统参数在 0.6 和 0.2 附近上下摆动,无法收敛.表明本文算法使非时变参数估计的收敛性得到提高.

图 2 给出两路信号真实值与估计值的比较,设定观测时间  $k = 100$ .

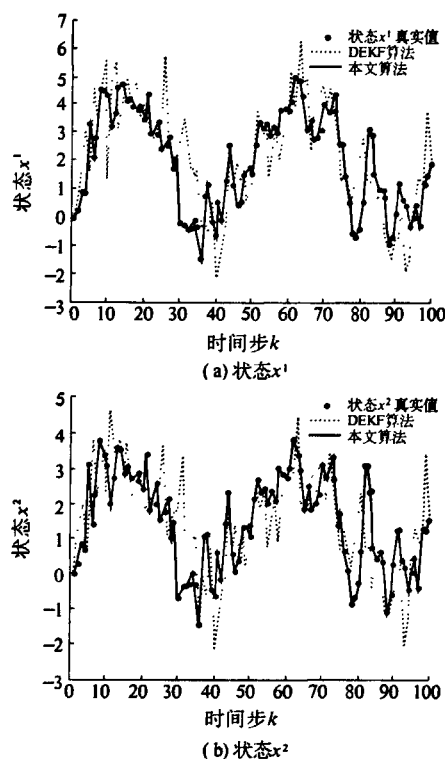


图 2  $x^1, x^2$  估计值与真实值的比较

Fig. 2 Comparison of true state and estimation values of  $x^1, x^2$

仿真结果表明,与 DEKF 算法相比,笔者提出的算法能更好地与真实状态相吻合,表明本文算法能有效地分离混合信号.

为了对分离结果定量分析,表 1 给出经过 100 次 Monte Carlo 仿真实验,两种算法计算出的非线性系统中状态 1 和参数 1 以及状态 2 和参数 2 的 RMSE 均值.

表 1 两种算法产生的状态  $x^1, x^2$  和参数  $\theta^1, \theta^2$  的经验标准偏差

Tab. 1 The mean square error of state  $x^1, x^2$  and parameter  $\theta^1, \theta^2$  produced by two algorithms

估计类型	DEKF 算法	本文算法
状态 $x^1$	0.777 460	0.026 499
参数 $\theta^1$	0.037 141	0.010 535
状态 $x^2$	0.864 330	0.035 526
参数 $\theta^2$	0.039 501	0.006 086

从仿真结果可以看出,本文算法的计算误差

明显低于 DEKF 算法,表明本文算法能更准确地分离出两路信号状态和参数。

#### 4 结论

为了对非线性非高斯系统进行混合信号分离,笔者提出了一种基于粒子滤波的分离方法,并采用核分布为贝塔分布的核平滑收缩技术来实现非时变参数的迭代。实验表明,本文算法在非线性系统中能有效的实现两路信号的分离,分离精度及收敛性均高于 DEKF 方法。

#### 参考文献:

- [1] COWELL D M J, FREEAR S. Separation of overlapping linear frequency modulated (LFM) signals using the fractional fourier transform [J]. IEEE Transactions, 2010, 57(10): 2324 - 2333.
- [2] NAMGOOK C, KUOC C J. Sparse music representation with source specific dictionaries and its application to signal separation [J]. IEEE Transactions, 2011, 19(2): 326 - 337.
- [3] WAN E A, NELSON A T. Dual extended kalman filter methods in kalman filtering and neural networks [M]. New York: John Wiley and Sons Inc, 2001: 123 - 173.
- [4] DOUCET A, FREITAS J F G, GORDON N J. Sequential Monte Carlo Methods in Practice [M]. New York: Springer, 2001: 202 - 206.
- [5] OLSSON J, RYDEN T. Rao-Blackwellization of particle markov chain monte carlo methods using forward filtering backward sampling [J]. IEEE Transactions, 2011, 59(10): 4606 - 4619.
- [6] 王忠勇,冯卫娜.一种基于粒子滤波的非线性系统参数和状态联合估计方法[J].郑州大学学报:工学版,2010,31(2):92 - 96.
- [7] 穆晓敏,曹丽果,路彦辉.一种新的基于粒子滤波的 OFDM 时变信道估计方法[J].郑州大学学报:工学版,2011,32(2):84 - 87.
- [8] 刘凯,李辉.一种新的重叠混沌信号盲分离算法[J].中国科学技术大学学报,2008,30(8):1129 - 1134.
- [9] WEST M. Approximating posterior distribution by mixtures [J]. Journal of Royal Statistical Society, 1993, 55(2): 409 - 422.

### A Novel Separation Method for Nonlinear Non-Gaussian Signal

WANG Zhong-yong<sup>1</sup>, LI Xiang<sup>1</sup>, WANG Xing-ye<sup>1</sup>, DUAN Lin-lin<sup>1,2</sup>

(1. School of Information Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China; 2. Institute of Science, Information and Engineering University, Zhengzhou 450001, China)

**Abstract:** In this paper, a novel separation method for nonlinear non-Gaussian signal is proposed. According to the state space model, the issue of separation was changed into the joint estimation of the parameter and state of the signal. In order to solve the problem of multi-signal separation for nonlinear systems, the algorithm uses particle filter method, combined the kernel smoothing contraction technique. The simulation results show that, in nonlinear system, compared with DEKF algorithm, the proposed method can solve the problem of multi-signal separation effectively.

**Key words:** particle filtering; nonlinear non-Gaussian signal; signal separation; kernel smoothing contraction