

## 估计复合材料有效弹性常数界限的综合方法

琚宏昌, 陈玲玲, 张璇

(广西工学院鹿山学院 土木工程系, 广西 柳州 545616)

**摘 要:**回顾了有效弹性模量估计的各种方法,分析了与常规有效弹性常数估计的上限VB、下限RB和Hashin-Shtrikman上限( $HSB^+$ )、下限( $HSB^-$ )相应的均匀化对比材料的取值情况,以及这些界限之间的相互关系,提出了以有效弹性常数常规估计—Voigt估计、Reuss估计分别作为均匀化对比材料,从而得到较Hashin-Shtrikman上下限更紧的新上下限。

**关键词:**微视力学;颗粒增强复合材料;有效弹性常数;上下限

**中图分类号:** TU502 **文献标志码:** A **doi:**10.3969/j.issn.1671-6833.2012.03.008

### 0 引言

可以采用多种不同的方法对复合材料体弹性常数进行预测.国内外学者提出了多种基于平均意义上的细观力学方法来预测复合材料有效性能,较为成熟的方法有:Eshelby等效夹杂理论、稀疏分布模型、Mori-Tanaka方法、自洽方法、微分法、广义自洽法等,这些方法可以大致分为两类,即混合方法<sup>[1]</sup>和微视力学方法<sup>[2-8]</sup>.

笔者基于细微视力学的观点及Eshelby等效夹杂理论,提出了一种复合材料总体有效弹性常数进行估计的综合方法,以有效弹性常数Voigt估计和Reuss估计分别作为均匀化对比材料,可以得到比Hashin-Shtrikman上下限更紧的新上下限。

### 1 有效弹性常数估计的综合方法

#### 1.1 有效弹性常数估计的经典方法

设一含有 $n$ 个夹杂的复合材料体, $n$ 个夹杂的弹性刚度张量分别为 $L_1, L_2, \dots, L_n$ ,基体的弹性刚度张量为 $L_0$ , $n$ 个夹杂所占的体积分数分别为 $c_1, c_2, \dots, c_n$ ,基体的体积分数为 $c_0$ .颗粒复合材料体积分分数存在下列关系:

$$\sum_{r=0}^n c_r = 1. \quad (1)$$

Voigt估计采用并联模型.假定在载荷作用下,各组成部分( $n$ 个夹杂及基体)的变形相同,都等于复合体的平均应变 $\bar{\varepsilon}$ ,即 $\varepsilon_r = \bar{\varepsilon}$ , ( $r = 1, 2, \dots, n$ ),复合材料体的平均应力为

$$\bar{\sigma} = \sum_{r=0}^n c_r \sigma_r. \quad (2)$$

各组成部分的弹性本构关系为

$$\sigma_r = L_r : \varepsilon_r = L_r : \bar{\varepsilon}. \quad (3)$$

将方程(3)代入方程(2),得到

$$\bar{\sigma} = L : \bar{\varepsilon}. \quad (4)$$

式中: $L$ 为复合材料体的平均弹性刚度张量,其表达式为

$$L = \sum_{r=0}^n c_r L_r. \quad (5)$$

上式表示复合材料体的平均弹性刚度张量是其各组成部分弹性刚度张量按体积的加权平均。

Reuss估计采用串联模型.假定在载荷作用下,各组成部分( $n$ 个夹杂及基体)的应力相同,都等于复合体的平均应力 $\bar{\sigma}$ ,即 $\sigma_r = \bar{\sigma}$ , ( $r = 1, 2, \dots, n$ ),颗粒复合材料体的平均应变为

$$\bar{\varepsilon} = \sum_{r=0}^n c_r \varepsilon_r. \quad (6)$$

各组成部分的弹性本构关系为

$$\varepsilon_r = \mu_r : \sigma_r = \mu_r : \bar{\sigma}. \quad (7)$$

收稿日期:2011-08-13;修订日期:2012-02-05

基金项目:广西省自然科学基金资助项目(200911MS115, 201010LX215);广西柳州市应用技术与开发计划项目(2010020603)

作者简介:琚宏昌(1965-),男,河南林州人,广西工学院副教授,博士,主要从事工程力学及混凝土材料方面的研究, E-mail: qhc410603@126.com.

将式(7)代入式(6),得到

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\mu} : \bar{\sigma}. \quad (8)$$

式中:  $\bar{\mu}$  为复合材料体的平均弹性柔度张量,其表达式为

$$\bar{\mu} = \sum_{r=0}^n c_r \mu_r. \quad (9)$$

上式表示复合材料体的平均弹性柔度张量是其各组成部分弹性柔度按体积的加权平均。

最近三十多年,提出了大量的微结构模型来预测材料的总体弹性常数,而这些不均匀多相异质材料依赖于材料的微结构。所有这些模型均基于 Eshelby 等效夹杂 (EEI) 方法。这些方法包括由 Wakashima and Tsukamoto<sup>[5]</sup> 基于修正的 EEI 方法并结合 Mori-Tanaka 方法<sup>[6]</sup> 的估计,由 Ravichandran<sup>[7]</sup> 提出的单位胞元近似数值方法及 Voronoi 胞有限元方法 (VCFEM)<sup>[8]</sup> 等等。

## 1.2 有效弹性常数估计的综合方法

与其它有效弹性常数估计方法不同,  $L$  可以通过以下的方法——综合法来求解。文献[1]存在下列关系:

$$\sum_{r=0}^n c_r \bar{A}_r = I^{(4)}, \quad (10)$$

如果  $\bar{A}_r$  可以表示为  $L$  的一个函数,  $L$  将被隐性地包含在式(10)中。

基于 Eshelby 等效夹杂理论<sup>[9]</sup>,  $\bar{\sigma}_r$  和  $\bar{\varepsilon}_r$  亦可用均匀对比材料 (HCM) 的形式表示出来,这种对比材料具有与多相材料相同的微几何特点,但其材料弹性常数为  $L_c$ ,即在 HCM 中,具有

$$\bar{\sigma}_r = L_c (\bar{\varepsilon}_r - \varepsilon_r^*), \quad (11)$$

其中  $\varepsilon_r^*$  是特征应变,或称作极化应变。

式(11)可以更进一步表示为

$$\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma} + L_c (\varepsilon_r' - \varepsilon_r^{**}), \quad (12)$$

$$\varepsilon_r' = \bar{\varepsilon}_r - \bar{\varepsilon}, \quad (13)$$

$\varepsilon_r'$  是指  $r$  相中相应于  $\varepsilon_r^{**}$  的扰动应变,修正的特征应变  $\varepsilon_r^{**}$  为

$$\varepsilon_r^{**} = L_c^{-1} \bar{\sigma} - \bar{\varepsilon} + \varepsilon_r^*. \quad (14)$$

通过 Eshelby 张量  $S_r$ , 两个量遵从下列关系:

$$\varepsilon_r' = S_r \varepsilon_r^{**}, \quad (15)$$

因此,方程(12)可以重新表示为

$$\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma} = -L_r^* (\bar{\varepsilon}_r - \bar{\varepsilon}), \quad (16)$$

其中,

$$L_r^* = L_c (S_r^{-1} - I^{(4)}), \quad (17)$$

为约束刚度张量。

进一步,式(16)可以重新表示为

$$\bar{\sigma}_r + L_r^* \bar{\varepsilon}_r = \bar{\sigma} + L_r^* \bar{\varepsilon}, \quad (18)$$

由此得到:

$$\bar{\varepsilon}_r = (L_r + L_r^*)^{-1} (L + L_r^*) \bar{\varepsilon}, \quad (19)$$

由平均应变关系  $\bar{\varepsilon} = \sum_{r=0}^n c_r \bar{\varepsilon}_r$ , 可以得到有效弹性常数估计公式为

$$\sum_{r=0}^n c_r (L_r + L_r^*)^{-1} (L + L_r^*) = I^{(4)}. \quad (20)$$

## 2 界限分析

应用 MTE (Mori-Tanaka estimate) 方法,可分别导出  $n+1$  相复合材料体的总体体积模量和剪切模量为

$$\frac{1}{K + K^*} = \sum_{r=0}^n \frac{c_r}{K_r + K^*}; \quad (21)$$

$$\frac{1}{G + G^*} = \sum_{r=0}^n \frac{c_r}{G_r + G^*}. \quad (22)$$

### 2.1 Voigt 限 (VB) 和 Reuss 限 (RB)

在文献[10]的方程(3.51) ~ (3.54) 中令  $K^* = 0$ , 可以得到估计值的下限 RB:

$$\frac{1}{K_R} = \sum_{r=0}^n \frac{c_r}{K_r}. \quad (23)$$

相比之下,令  $K^* \rightarrow \infty$ , 注意到  $\sum_{r=0}^n c_r = 1$ , 得到估计值的最高上限 VB:

$$K_V = \sum_{r=0}^n c_r K_r. \quad (24)$$

关于剪切模量  $G$  的上下限公式类似于体积模量  $K$  上下限公式。

### 2.2 Hashin-Shtrikman 上下限 (HSBs)

文献[10]给出了多种不同均质各向同性弹性材料相 HSB 的原始形式。如果第 0 相有着最小的弹性模量,第  $n$  相有着最大的弹性模量,体积模量下限  $K_{HS}^-$  和上限  $K_{HS}^+$  表示式为

$$\frac{1}{K_{HS}^- + K_1^*} = \sum_{r=0}^n \frac{c_r}{K_r + K_1^*}; \quad (25)$$

$$\frac{1}{K_{HS}^+ + K_2^*} = \sum_{r=0}^n \frac{c_r}{K_r + K_2^*}. \quad (26)$$

式(25)和(26)是当 HCM 分别取复合材料体中最软和最硬相材料时体积模量的特殊情况。很明显,Hashin and Shtrikman<sup>[10]</sup> 分别将复合材料体的最软和最硬相材料当作 HCM, 因此,HSB 提供了比 VB, RB 更加紧密的上下限。

剪切模量 HSB 上下限与体积模量 HSB 上下限类同。

### 2.3 新上下限

由前面分析得知 RE 和 VE 分别是比较粗糙的上下限. 不过, 与空洞(RB 中)和刚性夹杂(VB 中), 或最软相(HSB 下界)和最硬相(HSB 上界)相比, RE 和 VE 仍然是很好的近似估计. 据此, 分别将 RE 和 VE 作为 HCM, 可以得到新的上下界, 即

$$K_{LW}^- = \left( \sum_{r=0}^n \frac{c_r}{K_r + \frac{4}{3}G_r} \right)^{-1} - \frac{4}{3}G_r; \quad (27)$$

$$K_{LW}^+ = \left( \sum_{r=0}^n \frac{c_r}{K_r + \frac{4}{3}G_v} \right)^{-1} - \frac{4}{3}G_v. \quad (28)$$

其中  $G_r$  和  $G_v$  分别是由 Reuss 估计和 Voigt 估计得到的剪切模量.

方程(27)和(28)是新的上下限, 事实上, 它们也是两种估计. 由于 RE 和 VE (VE 不小于 RE) 总是大于最软的成分, 而小于最硬的成分, 根据方程(21)和(22), 新上下限总是比 HSB 上下限更加紧密.

剪切模量的上下限与体积模量上下限类同.

### 3 实例验证

文献[11]采用平均直径大约为 850  $\mu\text{m}$  的砂子制成的饱和砂浆混凝土试件, 进行了各种砂子颗粒体积分数含量的试验. 为了便于比较, 本实例采用该文献的实验数据. 水泥浆基体弹性常数为:  $K_0 = 22.51 \text{ GPa}$ ,  $G_0 = 11.80 \text{ GPa}$ ; 砂粒骨料弹性常数为:  $K_1 = 44.0 \text{ GPa}$ ;  $G_1 = 37.0 \text{ GPa}$ . 为了比较 HSB 上下限和新上下限, 将上述弹性常数值代入方程(25)、(26)、(27)、(28), 得到总体积模量和总体剪切模量分别随砂粒骨料体积分数变化的曲线, 如图1、图2所示. 由图可见, 新上下限位于 HSB 上下限的范围内, 说明新上下限是比 HSB 上下限更紧的界限. 实验数据落在 HSB 的范围内, 但不完全位于新上下限范围内, 这可能由试验条件及混凝土试验的离散特性造成的.

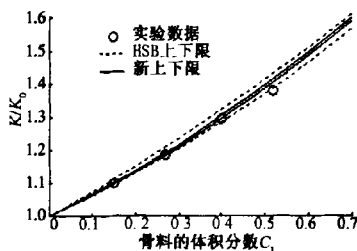


图1 体积模量估计值的比较

Fig. 1 Comparison of estimated bulk modulus

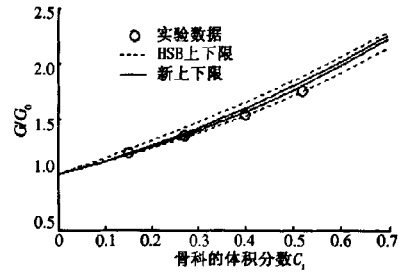


图2 剪切模量估计值的比较

Fig. 2 Comparison of estimated shear modulus

### 4 结论

基于细观力学的观点及 Eshelby 等效夹杂理论, 提出了一种复合材料弹性常数的综合估计方法. 以有效弹性常数常规估计—Voigt 估计、Reuss 估计值分别作为均匀化对比材料, 得到了比 Hashin-Shtrikman 上下限更紧的新上下限. 实验数据证明, 笔者提出的理论和采用的方法是正确的.

### 参考文献:

- [1] NAKAMURA T, WANG T, SAMPATH S. Determination of properties of graded materials by inverse analysis and instrumented indentation[J]. Acta Materialia, 2000, 48: 4293–4306.
- [2] MURA T. Micromechanics of defects in solids. second revised edition [M]. Dordrecht, The Netherlands: Martinus Nijhoff Publishers, 1987.
- [3] HILL R. A self-consistent mechanics of composite materials[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1965, 13: 213–222.
- [4] BENVENISTE Y. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials[J]. Mechanics of Materials, 1987, 6: 147–157.
- [5] WAKASHIMA K, TSUKAMOTO H. Mean-field micro-mechanics model and its application to the analysis of thermo-mechanical behavior of composite materials[J]. Materials science and engineering, 1991, 146: 291–316.
- [6] CHO J R, HA D Y. Averaging and finite-element discretization approaches in the numerical analysis of functionally graded materials[J]. Materials science and engineering, 2001, A302: 187–196.
- [7] RAVICHANDRAN K S. Elastic properties of two-phase composites[J]. Journal of the American Ceramic Society, 1994, 77: 1178–1184.
- [8] GRUJICIC M, ZHANG Y. Determination of effective elastic properties of functionally graded materials using Voronoi cell finite element method[J]. Materials Science and Engineering, 1998, A251: 64–76.

(下转第 39 页)

- [10] 薛福珍,唐琰. 基于 GA 的模糊神经网络控制器的设计与仿真[J]. 系统仿真学报,2001,13(5):573-575.
- [11] 张素,刘宇,谢云芳. 基于遗传算法的模糊神经网络温室温度控制器[J]. 农机化研究,2009(10):165-168.
- [12] 骆志高,田海泉,仇学青. 遗传算法在故障诊断中的应用研究综述[J]. 煤矿机械,2006,27(1):169-172.
- [13] 胡方霞,任艳君,陈兴龙. 基于遗传模糊神经网络的煤气鼓风机故障诊断[J]. 计算机工程与设计,2008,29(23):6079-6081.
- [14] 史永胜,宋云雪. 基于遗传算法与 BP 神经网络的故障诊断模型[J]. 计算机工程,2004,30(14):125-127.
- [15] 彭金柱,王耀南,孙炜. 基于混合学习算法的模糊小波神经网络控制[J]. 湖南大学学报:自然科学版,2006,33(2):51-54.
- [16] 姜静,姜琳,李华德,等. 基于遗传算法的模糊神经网络控制[J]. 煤矿机械,2007,28(3):129-131.

## Application of Genetic Neural Network to Gear Fault Diagnosis

LIU Jing-yan, LI Yu-dong, YANG Xiao-bang

(School of Electricity & Automation Engineering, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454000, China)

**Abstract:** Because gear faults have characteristics of being nonlinear and coupling between fault symptoms and fault, BP neural network gear fault diagnosis has slow convergence speed and poor reliability. The BP neural network gear fault diagnosis method based on genetic algorithm is put forward. Namely, the BP neural network is used in gear fault diagnosis, and genetic algorithm is applied to optimize the weights and thresholds of the network. So the global optimal value is obtained. The simulation results show that the diagnosis strategy has the characteristic of strong diagnosis ability and high diagnosis efficiency and improves the gear fault diagnosis precision and speed.

**Key words:** gear; fault diagnosis; neural network; genetic algorithm

(上接第35页)

- [9] NEMAT-NASSER S, HORI M. Micro-mechanics; overall properties of heterogeneous materials[M]. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier Science Publishers, 1993.
- [10] HASHIN Z, SHTRIKMAN S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1963, 11: 127-140.
- [11] WANG J A, LUBLINER J, MONTEIRO P J M. Effect of ice formation on the elastic moduli of cement paste and mortar[J]. Cement and Concrete Research, 1988, 18(6): 874-885.

## An Approach to Predicting Bounds of Effective Properties of Composite Materials

QU Hong-chang, CHEN Ling-ling, ZHANG Xuan

(Department of Civil Engineering, Lushan College of Guangxi University of Technology, Liuzhou 545616, China)

**Abstract:** This paper reviews various methods to predict the overall effective elastic properties of homogeneous isotropic composites based on the meso-micromechanics. Values of the homogeneous isotropic comparison materials are analyzed corresponding to the upper bound (VB) and lower bound (RB) of common prediction of the effective elastic properties, and the upper bound (HSB<sup>+</sup>) and lower bound (HSB<sup>-</sup>) of Hashin-Shtrikman estimates, and the relationships for these bounds are also discussed. New bounds tighter than Hashin-Shtrikman bounds are presented by taking the common estimates, the Voigt estimate and the Reuss estimate, as homogeneous comparison materials.

**Key words:** micromechanics; particulate reinforced composite; effective property; upper and lower bounds