

文章编号:1671-6833(2012)04-0046-04

Rikitake 双圆盘耦合发电机系统的动力学行为仿真与分析

姚齐国, 李 林, 刘玉良, 刘国平

(浙江海洋学院 机电工程学院, 浙江 舟山 316000)

摘 要: 推导出了 Rikitake 双圆盘耦合发电机系统的数学方程, 明确了在不同参数下发电机电流与圆盘角速度的关系, 计算了李雅普诺夫指数及混沌吸引子的分维数. 讨论了系统的混沌分岔行为和周期窗口的性态变化及其可能出现的混沌运动形态, 数值仿真得到双圆盘发电机模型在一定参数和初始状态下的混沌吸引子, 并分析了系统的对称性、平衡点、功率谱及稳定性等基本动力学特性. 这些特性在机电控制等方面具有重要的理论意义和实用价值, 也为解释地磁场逆转问题提供新的思路.

关键词: 耦合发电机系统; 混沌吸引子; 动力学特性; 仿真

中图分类号: TM31

文献标志码: A

doi:10.3969/j.issn.1671-6833.2012.04.011

0 引言

混沌是在确定性系统中产生的不规则运动, 混沌含有极为丰富的信息并广泛存在于各学科领域. 因此, 对混沌的研究已成为科学研究的重要分支.

地磁场在长期变化中会出现极性反转现象, 地磁学家们对此做了大量的研究工作, 先后提出了很多动力学模型来解释这一现象. 诸如运动学发电机反转模型、统计模型、磁流体动力学反转模型和力学模拟模型(也称为圆盘发电机模型). 在这些模型中, 圆盘发电机模型曾作为最早的地磁起源及反转模拟起过很重要的作用. 圆盘发电机模型中有单圆盘发电机模型(Bullard, 1955)、双圆盘发电机模型(Rikitake, 1958)和 N 圆盘耦合的发电机模型(Lebovitz, 1959)等^[1]. 其中 Rikitake 于 1958 年提出的双圆盘发电机模型含有丰富的混沌现象, 对其动力学行为的研究在机电控制等方面具有重要的理论意义和实用价值.

已有作者采用不同的方法分别对双圆盘发电机系统的混沌控制和混沌同步进行了研究^[2], 但对此系统的动力学行为进行较细致分析的报道还

不多. 而该系统的非线性图像、各种动力学行为, 尤其是对系统分岔过程和控制参数的影响分析将有助于认识和有效地进行混沌控制.

笔者导出了双圆盘耦合发电机模型的数学方程, 讨论了在不同参数下发电机电流与圆盘角速度的关系, 分析了系统的基本动力学特性, 为控制系统的混沌打下基础; 同时分析了该系统的稳定性, 数值计算电流随时间变化规律, 判定系统失稳后将演化为混沌态, 由此解释地磁场逆转随机性的成因.

1 双圆盘耦合发电机系统的数学模型

长期监测地磁场发现其经常发生随机性的逆转, 普遍认为地磁场是由导电的外地核形成的^[3]. 日本地磁学家 T. Rikitake(力武常茨)在 1958 年将上述解释抽象为数学的非线性微分方程组, 首次提出了双圆盘发电机模型. 它由连接在一起的两台发电机组成, 其中任何一台发电机都处于另一台发电机产生的电流所形成的磁场之中, 如图 1 所示. 图中 x_1 、 x_2 分别为两个回路的电流, y_1 、 y_2 为两个圆盘的角速度.

为简化起见, 忽略两回路其它部分可能产生

收稿日期:2012-01-28;修回日期:2012-04-09

基金项目:国家星火计划资助项目(2011GA700190);浙江省教育厅资助项目(Y201019075)

作者简介:姚齐国(1966-),男,湖北公安人,浙江海洋学院副教授,博士,主要研究方向系统建模与仿真、电路分析及应用、优化运算与运行、混沌理论及其应用, E-mail:yaoqiguo@163.com.

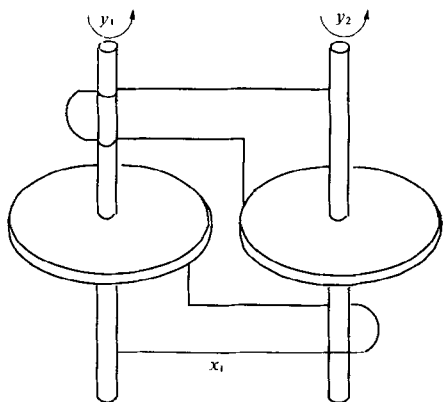


图1 双圆盘耦合发电机模型

Fig.1 Model of two-disk dynamo system

的互感,则两回路的电路方程和力学方程是^[4-5]

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = x_1 R + L \dot{x}_1 = K y_1 x_2 \\ \varepsilon_2 = x_2 R + L \dot{x}_2 = K y_2 x_1 \\ J \dot{y}_1 = T - K x_1 x_2 \\ J \dot{y}_2 = T - K x_1 x_2 \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 指圆盘中心与边缘产生的电动势; R, L 分别为两回路的电阻和自感; J 为转动惯量; T 为恒定外力矩; K 是与几何因子有关的常数. 由力学方程的相同形式不难得知 $y_1 - y_2 = \text{常数}$, 令

$$\begin{cases} y_1 = y + m \\ y_2 = y - m \end{cases} \quad (2)$$

式中: m 为常数. 由此方程可以将式(1)化简合并为

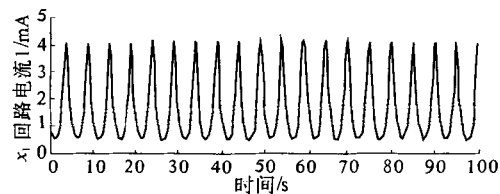
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -A x_1 + B y x_2 + B C x_2 \\ \dot{x}_2 = -A x_2 + B y x_1 - B C x_1 \\ \dot{y} = 1 - D x_1 x_2 \end{cases} \quad (3)$$

这里作了一尺度变换 $y' = (J/T)y$, 并将 y' 写回 y . 式中 $A = R/L, B = TK/(JL), C = Jm/T, D = K/T$. 式(3)即为描述双圆盘耦合发电机的非线性方程组, 且方程中各变量的物理意义明确.

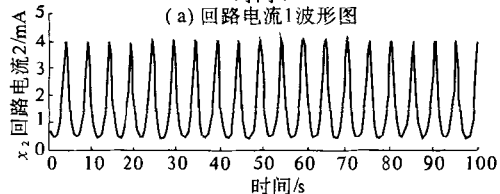
m 值的选取对系统的动力学行为有着重要影响. 若 $m=0$ (则 $C=0$), 从式(2)可知 $y_1 = y_2 = y$, 即两圆盘的角速度相同, 此时系统的不动点为:

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{D}}, \pm \frac{1}{\sqrt{D}}, \pm \frac{A}{B} \right).$$

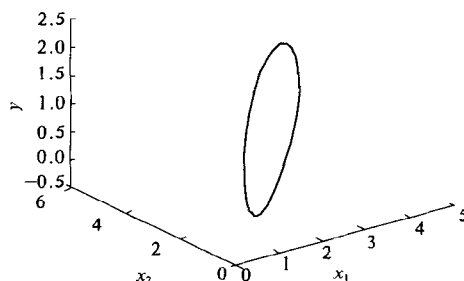
若取 $A=1, B=1, C=0, D=0.25$, 求得不动点为 $(\pm 2, \pm 2, \pm 1)$. 取初始条件 $(1, 1, 0)$, 仿真时间 100 s, 采用 4 阶龙格-库塔法对系统求解, 结果如图 2、3 所示, x_1, x_2 波形图显示回路电流有周期解. 图 3 反映了轨线趋向极限环的进程, 最终轨线为一绕不动点 $(2, 2, 1)$ 的闭合曲线.



(a) 回路电流1波形图



(a) 回路电流2波形图

图2 x_1, x_2 的波形图Fig.2 Wave chart of x_1 and x_2 图3 $C=0$ 时, x_1, x_2, y 的相图Fig.3 x_1, x_2 and y 's phase graph under $C=0$

若 $m \neq 0$, 即两圆盘的角速度不同, 此时式(3)所表示的系统具有丰富的动力学行为, 下面从几方面具体分析.

2 耦合发电机系统的动力学特性

2.1 对初值的敏感性

对方程组(3)选择适当的参数(取 $A=1, B=1, C=2, D=0.25$), 给初始条件一个极微小的差别, 如分别取 $[0.1, 0.1, 1.0]$ 和 $[0.1, 0.1, 1.000\,000\,1]$, 仿真时间 140 s, 利用 Matlab 画出它们位移曲线如图 4 所示, 其相图如图 5 所示.

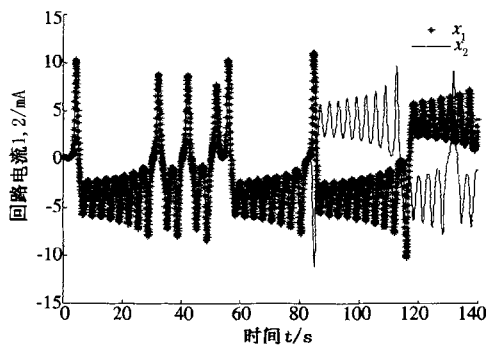


图4 初始条件有微小差别的两条位移曲线

Fig.4 Two displacement curve under small different initial condition

由图 4 可见, 在初始阶段 ($t < 85$ s), 两曲线

没有差别,只有在较长时间($t > 85$ s)后两者才有明显差别.这充分表明系统的状态敏感地依赖于初始条件,这种由确定性方程产生的对初值敏感的现象正是混沌现象.

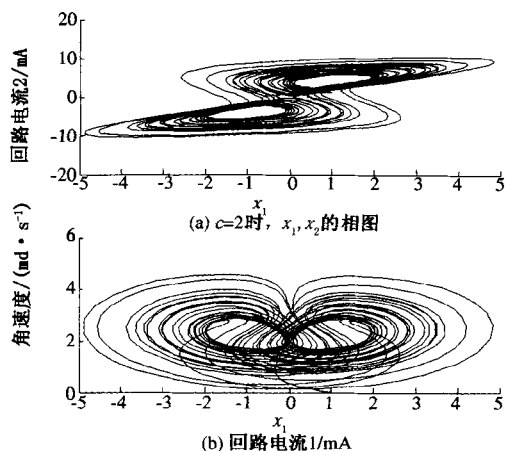


图5 $C=2$ 时, x_1, x_2 的相图

Fig. 5 x_1, x_2 and y 's phase graph under $C=2$

由图5可见,系统(3)的混沌吸引子除具有低维混沌吸引子的一般特点外,还具有其独特之处:吸引子的二维投影具有较复杂的折叠和拉伸轨线,这说明系统(3)在局部上比低维混沌系统具有更强的不稳定性^[6].

从最近170兆年地磁极性年表知道地磁场的极性存在反转,并且反转规律极其复杂.用Rikitake模型来模拟地磁场的极性反转规律,从吸引子(图5)的图形可以看出,轨线环绕两个不动点转换,这种转换正好可用来比拟地磁场极性的正反转向. x_1 和 x_2 表示地磁场的极性,故地磁场逆转具有随机性,与实际监测地磁场经常发生随机性逆转的事实相吻合.同时, x_1 和 x_2 随 t 的变化规律可用来模拟地磁场的反转变换规律,适当调整初始条件和参数,选取其中的一段,使它尽可能与地磁极性年表相吻合,从而可以在地磁长期变化的研究中达到推知过去、预测未来的目的.

2.2 李雅普诺夫指数与功率谱

李雅普诺夫指数是一种定量描述动力系统轨道局部稳定性的方法.李雅普诺夫指数刻画了局部范围里系统轨道间的分离程度,当李雅普诺夫指数大于0时,轨道间的距离随着时间成指数分离,系统呈现出对初始状态的极度敏感性.

应用Wolf等提出的数值计算方法,在 $A=1$, $B=1$, $C=2$, $D=0.25$ 时计算出系统(3)的李雅普诺夫指数分别是 $\lambda_1=0.27$, $\lambda_2=0.00$, $\lambda_3=-3.13$,分维数 $d=2.08$,显然,系统处于混沌运动状态.

由于混沌运动的非周期性和复杂性,它的功

率谱不同于周期运动的离散功率谱,而是连续谱^[7].采用与上述相同的初始条件和参数,得到系统(3)的功率谱如图6所示.

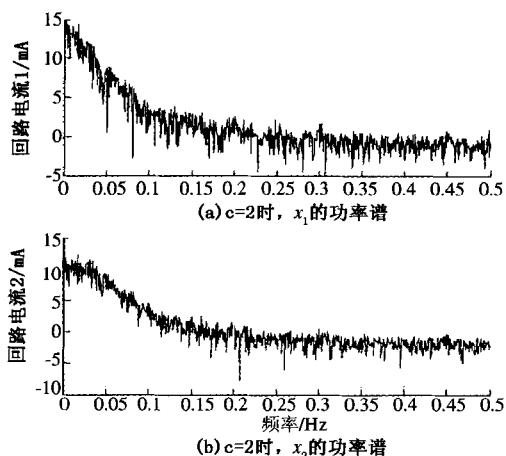


图6 $C=2$ 时, x_1, x_2 的功率谱

Fig. 6 x_1 and x_2 's power spectrum under $C=2$

通过进一步数值演算,可以确定系统(3)处在混沌区时的 A, C 取值范围大约为 $A \in [0.6, 6]$ 和 $C \in [1, 7]$.

2.3 对称性

首先,系统(3)具有自然的变量对称性,做变换 $(x_1, x_2, y) \rightarrow (-x_1, -x_2, y)$,系统(3)保持不变,即系统关于 y 轴对称,且这种对称性对所有参数均成立.

其次,系统(3)还具有参数 C 的对称性,做变换 $(x_1, x_2, y, C) \rightarrow (x_1, x_2, y, -C)$,系统(3)保持不变.另外,从系统平衡点的多样化对称也可以说明这一点,故该系统具有多种对称性.

2.4 耗散性

系统(3)的相空间体积时间变化率为

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = -2A < 0,$$

说明系统(3)是耗散的并以指数形式 $\frac{dV}{dt} = e^{-2At}$ 收敛.也就是一个初始体积为 $V(0)$ 的体积元在时刻 t 时收缩为体积元 $V(0)e^{-2At}$.这意味着,当 $t \rightarrow \infty$ 时,包含系统轨线的每个小体积元以指数速率 $-2A$ 收缩到零,所有系统的轨线最终会被限制在一个体积为零的极限子集上,其渐近运动将被固定在一个吸引子上,这也说明了吸引子的存在性.

2.5 分岔图

分岔图可以较直观地反映非线性动力系统随系统参数变化的动态特性,从而可分析出其对系统动态特性的影响^[8-9].保持初始条件不变,分岔

参数 $A \in [2.0, 2.1]$ 时,得到系统的数值解 x_1 随参数 A 变化的全局分岔图如图 7 所示. 当 A 变化时,系统具有丰富的非线性动力学行为,周期运动与混沌交替发生,而且在发生混沌运动的区间中含有许多周期窗口.

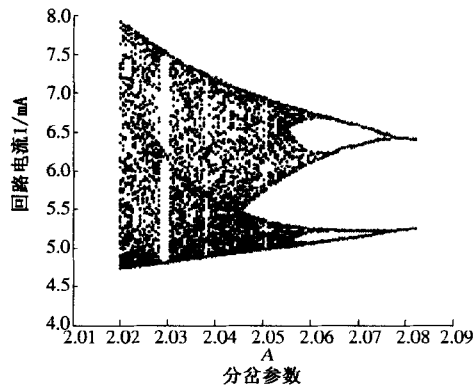


图 7 $C=2$ 时, x_1 随 A 变化的分岔图

Fig. 7 Bifurcation diagram between x_1 and A under $C=2$

随着参数 A 的变化,系统(3)出现混沌、周期和准周期三种状态. 从系统定义看, C 表征了耦合发电机两个转子的角速度的差异, A 表征发电机耗散性能的参数,研究发现,无论哪个参数发生变化,都会对系统的动力学行为产生显著的影响,使得系统的运动变得十分复杂,形成混沌与周期窗口交替的现象,不同窗口的性态变化各异,从而使系统(3)具有复杂的动力学特性.

3 结论

在 Rikitake 双圆盘耦合发电机模型(系统)中,

若两圆盘有相同的角速度,在 $t \rightarrow \infty$ 时,系统有周期性稳定解;若两圆盘转动的角速度有差异时,圆盘电流将失去稳定周期,进入混沌态.

笔者应用数值方法分析了模型的基本动力学特性,以及系统参数变化所引起的分岔和混沌行为,对多个参数的耦合发电机系统在较宽条件下的非线性动力学行为研究及其混沌控制具有参考价值.

参考文献:

- [1] 杨先林. Rikitake 双盘发电机模型的混沌行为[J]. 贵州工业大学学报:自然科学版,2003,32(3):3-5.
- [2] 吴淑花,孙毅,郝建红,等. 耦合发电机的分岔和双参数特性[J]. 物理学报,2011,60(1):1-9.
- [3] 张济仕,宫德龙. 变形 Rikitake 系统的混沌同步和应用[J]. 计算机仿真,2010,27(5):336-339.
- [4] 钟季康. 圆盘耦合发电机模型的讨论[J]. 上海铁道大学学报,1998,19(10):24-28.
- [5] RIKITAKE T. Oscillations of a system of disk dynamos[J]. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, 54(1):89-105.
- [6] 王兴元. 复杂非线性系统中的混沌[M]. 北京:电子工业出版社,2003.
- [7] CHEN YU. Chaos control-theory and applications[M]. New York: Springer-Verlag,2003.
- [8] 刘秉正,彭建华. 非线性动力学[M]. 北京:高等教育出版社,2003.
- [9] 张琪昌,王洪礼,竺致文,等. 分岔与混沌理论及应用[M]. 天津:天津大学出版社,2005.

Dynamic Behavior Simulation and Analysis of the Rikitake Two-disk Dynamo System

YAO Qi-guo, LI Lin, LIU Yu-liang, LIU Guo-ping

(School of Mechanical & Electrical Engineering, Zhejiang Ocean University, Zhoushan 316000 China)

Abstract: The mathematical equations of the Rikitake two-disk dynamo have been derived. The relationship between the dynamo currents and the angular velocity of disk has been defined. It calculated the lyapunov exponent and fractal dimension of chaotic attractor. And then this paper discussed the system's chaotic bifurcation behavior and the state diversification of its periodical windows, as well might appear chaotic movement patterns. After simulating, it obtained the Rikitake two-disk dynamo's chaotic attractors. Moreover, it analyzed the system's basic dynamic behavior such as symmetry, power spectrum, equilibrium pots, stability and so on. These chaotic behavior can be used to simulate the reversals of the geomagnetic field. Furthermore, it has important theory significance and practical value.

Key words: two-disk dynamo system; chaotic attractor; dynamic characteristic; simulation