

文章编号:1671-6833(2012)04-0036-05

基于数值 inf-sup 条件的 US-FE-LSPIM 四边形单元稳定性研究

贾程, 陈卉卉

(盐城工学院 土木工程学院, 江苏 盐城 224051)

摘要: US-FE-LSPIM 四边形单元由传统的四节点等参元形函数集和 FE-LSPIM 四边形单元形函数集分别作为检验函数和试函数而构成. 传统的四节点等参元形函数集用于满足单元间和单元内位移连续性要求; FE-LSPIM 四边形单元形函数集用于满足位移完备性要求. 该单元能方便地施加整段长度的位移边界条件. 它具有计算精度高、对网格畸变不敏感的优点, 满足数值收敛的一致性要求. 进一步研究该单元数值收敛的稳定性. 由于通过解析的方法验证单元是否满足 inf-sup 条件较为困难, 利用数值的方法, 推导出了该单元数值化的 inf-sup 条件表达式, 检验该单元是否满足 inf-sup 条件. 典型算例表明, 该单元能通过数值 inf-sup 检验, 满足稳定性要求, 为检验单元的稳定性提供一种简便途径.

关键词: US-FE-LSPIM 四边形单元; 一致性要求; 稳定性要求; inf-sup 条件

中图分类号: O343.1

文献标志码: A

doi:10.3969/j.issn.1671-6833.2012.04.009

0 引言

在过去的几十年中, 有限单元法已经广泛应用于工程计算领域. 但是, 使用传统的等参有限元模型精度较低, 在畸变的网格下结果较差. 为提高有限单元法的精度, 学者们做了大量的研究工作.

Wilson 等^[1]通过引入内部参数, 提出了著名的四节点非协调 Q6 单元. Simo^[2]在 1990 年提出了增强假设应变法(EAS), 应变域中引入了由额外的内部域变量产生的应变. 龙驭球等^[3]建立了四边形面积坐标理论, 提出了许多高质量的单元. 无网格方法由于不需要网格离散问题域, 而且具有精度高、应力连续的特点. 因此, 近些年来涌现出许多种无网格方法, 例如无网格伽辽金法(EFG)^[4]、点插值法(PIM)^[5]等. 由于无网格法形函数不具有 Kronecker-delta 性质, 使得直接施加本质边界条件比较困难.

为了构建高精度单元, 最近 Rajendran 等^[6]结合有限单元法和无网格法的优点, 提出了 FE-LSPIM QUAD4 单元. 该单元属于杂交单元. 与有限单元法相比, 它的优点是 FE-LSPIM 单元的形函数对网格畸变不敏感. 但是, 该单元施加单元整

体边界需满足的位移不方便, 需要用罚函数或拉格朗日乘子法.

针对 FE-LSPIM 四边形单元的不足, 文献[7-8]提出 US-FE-SPIM QUAD4 单元. 该单元由不同的形函数集作试函数和检验函数而构成. 传统的等参形函数集作为检验函数, 能够满足单元内和单元间的位移连续性要求; 使用 FE-LSPIM QUAD4 单元^[6]形函数作为试函数, 能够满足所有位移完备性要求. 该单元优于传统的四边形等参单元 Q4 和 QM6 单元, 显示了良好的抗网格畸变性, 并且能方便地施加整段长度的位移边界条件.

一致性和稳定性是保证有限元收敛的两个重要要求. 一致性要求确保随着网格细分, 单元的尺寸趋于 0 时, 有限元的解趋于精确解. 一致性要求可以通过选择连续的检验函数和试函数满足. 文献[8]使用常应变分片检验和线性应变分片检验算例, 证明 US-FE-SPIM 四边形单元满足一致性要求. 稳定性要求需要满足著名的 Babuska-Brezzi 条件^[9](BB 条件), BB 条件又称 inf-sup 条件. 对于给定的网格划分, 检验 inf-sup 条件能够为评估一个单元的稳定性提供必要的信息.

笔者进一步研究 US-FE-SPIM 四边形单元的

收稿日期:2012-02-13; 修订日期:2012-04-05

基金项目: 建设部资助项目(2010-K4-38); 盐城工学院人才资助项目(XKR2011016)

作者简介: 贾程(1981-), 男, 江苏镇江人, 盐城工学院讲师, 博士, 主要研究方向为结构仿真计算, E-mail: jctonm@

163.com.

数值收敛稳定性,推导出了该单元数值化的 inf-sup 条件表达式.通过数值的方法,检验该单元是否满足 inf-sup 条件.典型算例表明,该单元能通过数值 inf-sup 检验,满足稳定性要求,确保该单元数值结果的收敛性.

1 US-FE-SPIM 四边形单元

1.1 FE-LSPIM 四边形单元的形函数

单元内位移 u 写成

$$u(x, y) = N' u^e. \quad (1)$$

式中: $N' = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$, $N_i, i = 1, 2, 3, 4$ 是四边形等参元形函数.

$$u^e = [u_1(x, y) \ u_2(x, y) \ u_3(x, y) \ u_4(x, y)]^T. \quad (2)$$

$u_i(x, y), i = 1, 2, 3, 4$, 为节点位移函数,在该节点处等于其位移值,即: $u_i(x_i, y_i) = u_i, i = 1, 2, 3, 4$ 位移函数 $u_i(x, y)$ 由 i 点的支持域内的节点值运用最小二乘点插值法(LSPIM)得到,

$$u_i(x, y) = \Phi_i u_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (3)$$

式中: $\Phi_i = [\Phi_1^i \ \Phi_2^i \ \Phi_3^i \ \dots \ \Phi_N^i]$, $i = 1, 2, 3, 4$; $u_i = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \dots \ u_N]^T$; Φ_i 是 LSPIM 法的关于节点 i 的形函数矩阵; u_i 是节点 i 支持域内节点的位移参数向量; N 是节点 i 支持域内的所有节点数,对于该单元内的其他节点, N 可能不同.一个单元所有节点支持域的合集构成了一个单元的支持域 Ω .

节点支持域和单元支持域的定义如图 1 所示.

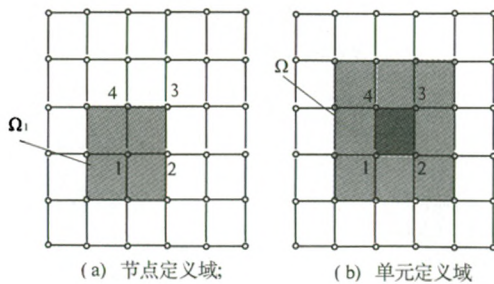


图 1 支持域的定义

Fig. 1 Definition of the support

设单元支持域 Ω 内的节点数为 M , 则 $1 \leq N \leq M$, 方程(3)就可以写成单元支持域的形式:

$$u^e = \begin{Bmatrix} u_1(x, y) \\ u_2(x, y) \\ u_3(x, y) \\ u_4(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_1 u_1 \\ \Phi_2 u_2 \\ \Phi_3 u_3 \\ \Phi_4 u_4 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_1^1 & \Phi_2^1 & \Phi_3^1 & \Phi_4^1 & \Phi_5^1 & \dots & \Phi_M^1 \\ \Phi_1^2 & \Phi_2^2 & \Phi_3^2 & \Phi_4^2 & \Phi_5^2 & \dots & \Phi_M^2 \\ \Phi_1^3 & \Phi_2^3 & \Phi_3^3 & \Phi_4^3 & \Phi_5^3 & \dots & \Phi_M^3 \\ \Phi_1^4 & \Phi_2^4 & \Phi_3^4 & \Phi_4^4 & \Phi_5^4 & \dots & \Phi_M^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_M \end{Bmatrix} = \Phi u^e. \quad (4)$$

式中: Φ 是相应于单元支持域的 LSPIM 单元形函数矩阵; u 是单元支持域内所有节点的 x 方向的位移向量.为了方便起见,方程(4)中 Φ 的前四列为该单元的 4 个节点,其它列则是该支持域内的其他点.

将式(4)带入式(1)得

$$u(x, y) = N'(\Phi u) = (N'\Phi)u = \Psi u. \quad (5)$$

从式(5)中,得到该单元的形函数矩阵:

$$\Psi = N'\Phi = [\Psi_1 \ \Psi_2 \ \Psi_3 \ \Psi_4 | \Psi_5 \ \dots \ \Psi_M]. \quad (6)$$

Φ 中的元素 Φ_i 可以由 i 点的支持域内的节点值运用最小二乘点插值法(LSPIM)得到

$$\Phi_i = [1 - (\frac{\bar{q}}{1 \times 77 \times (N-1)} \frac{\bar{Q}}{(N-1) \times 1}) | \frac{\bar{q}}{1 \times 77 \times (N-1)} \frac{\bar{Q}}{(N-1)}], \quad (7)$$

式中: 1 为所有元素均为 1 的列向量; \bar{q}, \bar{Q} 的定义见文献[7].利用式(6)进而可以求出单元的形函数矩阵 Ψ .

1.2 US-FE-SPIM 四边形单元

线弹性体在平衡状态下的虚功方程为

$$\int_{\Omega} \delta \epsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega - \int_{\Gamma} \delta u^T t d\Gamma = 0, \quad (8)$$

式中: b 为体力, t 为面力, δu 是虚位移场, $\delta \epsilon$ 是相应的虚应变场, σ 为真实的应力场.

FE-LSPIM 四边形单元形函数 Ψ 能够满足高阶单元形函数完备性条件^[10],而常规的四边形等参元形函数只能满足低阶的条件.

由于式(8)中的虚位移可以是任意的,只要它满足本质边界条件和域内连续性条件.故常规的四边形等参元形函数插值的位移、应变是个合适的选择.应力试函数选择由 FE-LSPIM 四边形单元形函数插值的应力场.将它们代入式(8)中,经整理(见文献[7])可得系统方程为

$$KU = F. \quad (9)$$

其中, $K = \sum_{e=1}^K \left(\int_{\Omega^{(e)}} \bar{B}^T D \hat{B} d\Omega^{(e)} \right);$

$$F = \sum_{e=1}^K \left(\int_{\Omega^{(e)}} N^T F^{(e)} d\Omega^{(e)} + \int_{\Gamma^{(e)}} N^T t^{(e)} d\Gamma^{(e)} \right).$$

2 inf-sup 条件

有限元公式保持数值稳定需要满足 inf-sup 条件.

对于线弹性椭圆边值问题,求 $u \in U$, 使得

$$a(u, w) = \langle f, w \rangle \quad \forall w \in W, \quad (10)$$

则 inf-sup 条件为

$$\inf_{u \in U} \sup_{w \in W} \frac{|a(u, w)|}{\|u\|_U \|w\|_W} \geq \beta > 0, \quad (11)$$

式中: β 是与网格细分以及边界条件无关的常数, 称为 BB inf-sup 常数. U, W 为 Hilbert 空间, 对于 U :

$$U = \left\{ u \mid u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega), \right. \\ \left. i, j = 1, 2; u_i|_{\Gamma_n} = 0, i = 1, 2 \right\}, \quad (12)$$

W 类似. $a(\cdot, \cdot): U \times W \rightarrow R$ 是双线性型. $L^2(\Omega)$ 为 Ω 上二次可积函数空间. $\|u\|_U$ 和 $\|w\|_W$ 分别是定义在空间 U, W 上的范数, 笔者采用半范数^[11], 对于 $\|u\|_U$:

$$\|u\|_U = \sqrt{\int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 d\Omega \right]}. \quad (13)$$

但是, 通过解析的方法获得 BB inf-sup 常数 β 较为困难, 故笔者采用数值的方法寻找 β 的估计值, 检验单元是否满足 inf-sup 条件^[9]: 如果某个问题在网格细分情况下 β 的估计值稳定收敛于正值, 那么这种单元就通过数值 inf-sup 检验, 满足 inf-sup 条件, 表明该单元稳定.

对于给定的网格划分, 方程 (11) 的有限单元形式为

$$\inf_{U \in R^N} \sup_{W \in R^N} \frac{|W^T K U|}{\sqrt{W^T S_W W} \sqrt{U^T S_U U}} = \beta_h > \beta > 0, \quad (14)$$

式中: β_h 称为 inf-sup 值, 是 β 的估计值; U 和 W 是位移向量; 对于 US-FE-SPIM 四边形单元; K 为整体刚度矩阵; S_W 和 S_U 为整体范数矩阵, 它由相应的单元范数矩阵组装成, 即

$$S_W^{(e)} = \int_{\Omega} (GN^T)(GN) d\Omega, \quad (15)$$

$$S_U^{(e)} = \int_{\Omega} (GQ^T)(GQ) d\Omega, \quad (16)$$

N 为有限元形函数矩阵; Q 为 FE-LSPIM 四边形单元形函数矩阵; G 为微分算子矩阵.

$$G = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial y \end{bmatrix}^T. \quad (17)$$

可以证明^[11] $\beta_h = \sqrt{|\lambda_{\min}|}$, 其中 λ_{\min} 是下面特征问题去掉零特征值的最小特征值.

$$(K^T S_W^{-1} K) \varphi = \lambda S_U \varphi. \quad (18)$$

3 检验算例

3.1 正方形板

如图 2 所示, 受两类边界条件的正方形板, 用四个单元组成的超单元 (如图 3) 划分模型, 分别采用 $1 \times 1, 2 \times 2, 4 \times 4, 8 \times 8$ 个超单元划分. 图 2 中模型采用了 2×2 规则网格划分. 对于畸变网格划分, 情况类似. 弹性模量 $E = 2.1 \times 10^{11}$, 泊松比 $\mu = 0.3$, 采用 2×2 高斯积分, 考虑平面应力情况.

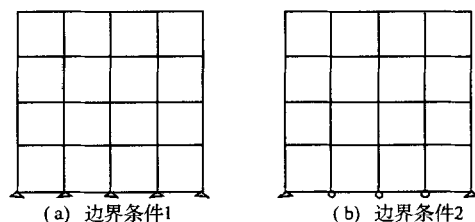


图 2 2×2 规则超单元划分的正方形板

Fig. 2 2×2 Regular sprelements used for square plate.

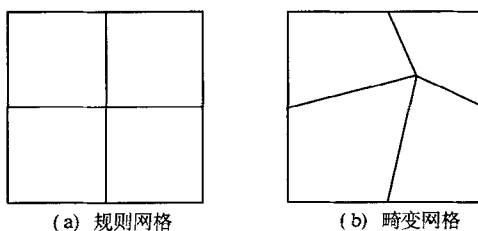


图 3 两类超单元

Fig. 3 Two types of superelements.

图 4 ~ 图 5 绘出了 $\text{LOG}_{10}(\text{inf-sup 值}) - \text{LOG}_{10}(1/N)$ 曲线图, 其中 N 为板长方向的网格数. 从图中可以看出, 在两类边界条件下, 规则网格和畸变网格的 inf-sup 值都能稳定收敛于一个正值.

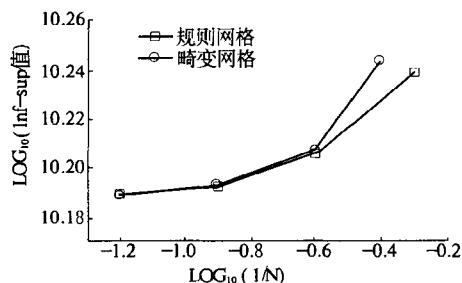


图 4 正方形板边界条件 1 的 inf-sup 值收敛性
Fig. 4 Convergence of inf-sup value for square plate with the boundary condition 1.

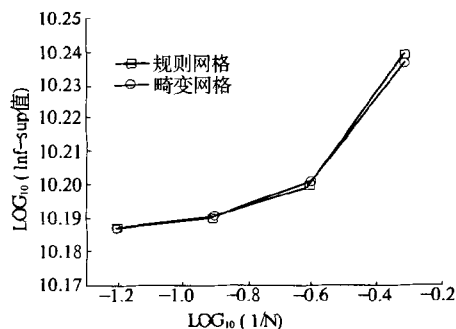


图5 正方形板边界条件2的 inf-sup 值收敛性

Fig.5 Convergence of inf-sup value for square plate with the boundary condition 2.

3.2 Cook 悬臂梁

如图6所示,右端边界受分布剪力的变截面悬臂梁.采用 $2 \times 2, 4 \times 4, 8 \times 8, 16 \times 16$ 的网格划分模型.泊松比 μ 为 $1/3$,弹性模量 $E=1$.边界条件1为左边界节点约束 x, y 方向位移,边界条件2为左右两边界节点约束 x, y 方向位移.

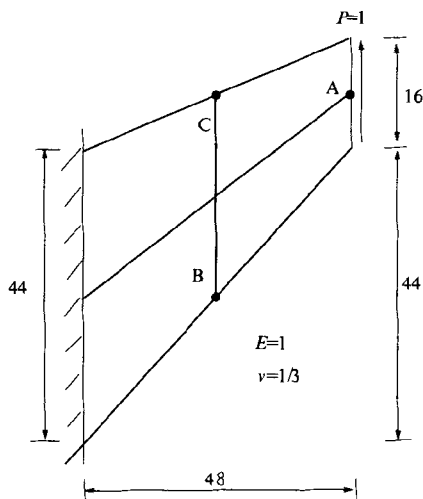


图6 Cook 悬臂梁

Fig.6 Cook's skew beam.

图7绘出了 $\text{LOG}_{10}(\text{inf-sup 值}) - \text{LOG}_{10}(1/N)$ 曲线图.

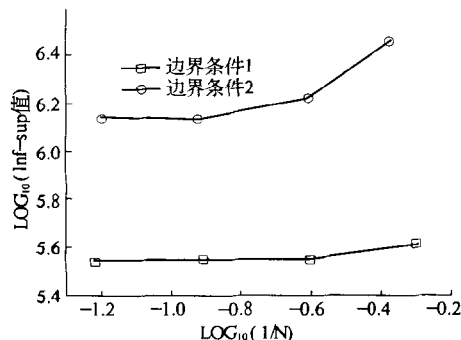


图7 Cook 悬臂梁的 inf-sup 值收敛性

Fig.7 Convergence of inf-sup value for Cook's skew beam

从图上可以看出,对于边界条件1和2, inf-sup 值都能稳定收敛于一个正值.

3.3 厚弯曲梁

对图8厚弯曲梁分别采用 $2 \times 4, 4 \times 8, 6 \times 12, 8 \times 16$ 的网格划分,弹性模量 $E = 1.0 \times 10^7$,泊松比 $\mu = 1/3$,厚 $t = 1$.图9绘出了不同高斯积分时的 $\text{LOG}_{10}(\text{inf-sup 值}) - \text{LOG}_{10}(1/N)$ 曲线图.

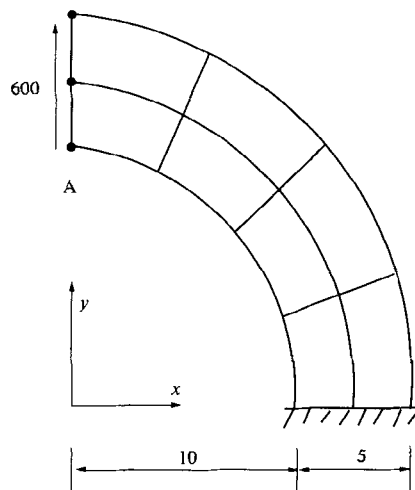


图8 厚弯曲梁

Fig.8 Rhick curved beam

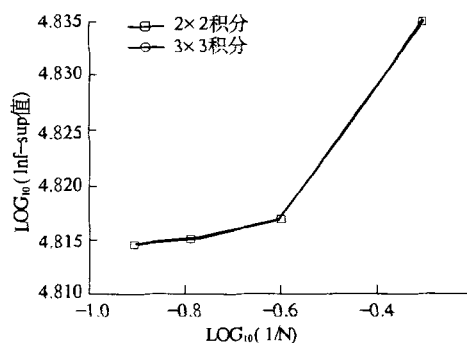


图9 厚弯曲梁的 inf-sup 值收敛性

Fig.9 Convergence of inf-sup value for thick curved beam

从图上可以看出,对于 2×2 和 3×3 高斯积分 inf-sup 值都稳定收敛一个正值.

4 结论

进一步研究了 US-FE-SPIM 四边形单元的数值收敛的稳定性.由于通过解析的方法验证一种单元是否满足 inf-sup 条件较为困难,利用数值的方法,推导出了 US-FE-SPIM 四边形单元数值化的 inf-sup 条件表达式,检验该单元是否满足 inf-sup 条件.典型算例表明,该单元在不同的边界条件、规则和畸变网格以及不同高斯积分方案下,其 inf-sup 值都能稳定的收敛于一个正值,能通过数值 inf-sup 检验,满足单元的稳定性要求. US-FE-SPIM 四边形单元满足一致性和稳定性要求,确保

了该单元数值结果的收敛性. 数值化的 inf-sup 条件表达式为检验单元的稳定性提供了简便的途径.

参考文献:

- [1] WILSON E L, TAYLOR R L, DOHERTY W P, et al. Incompatible displacement modes [C]. New York: Academic Press, 1973.
- [2] SIMO J C, RIFAI M S. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1990, 29(8): 1595 - 1638.
- [3] 龙驭球, 李聚轩, 龙志飞, 等. 四边形单元面积坐标理论 [J]. 工程力学, 1997, 14(3): 1 - 11.
- [4] BELYTSCHKO, LU Y Y, Gu L. Element free Galerkin methods [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37(2): 229 - 256.
- [5] LIU Gui-rong, GU Yuan-tong. A point interpolation method for two dimensional solid [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 50(4): 937 - 951.
- [6] RAJENDRAN S, ZHANG B R. A "FE-Meshfree" QUAD4 element based on partition of unity [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, 197(1-4): 128 - 147.
- [7] 贾程, 陈国荣, 陈卉卉. US-FE-SPIM 四边形单元的自由振动研究 [J]. 郑州大学学报: 工学版, 2009, 30(2): 129 - 132.
- [8] 贾程, 陈国荣, 陈卉卉. US-FE-SPIM 四边形单元及其在几何非线性问题中的应用 [J]. 计算力学学报, 2011, 28(5): 785 - 791.
- [9] CHAPELLE D, BATHE K J. The inf-sup test [J]. Computers and Structures, 1993, 47(4/5): 537 - 545.
- [10] RAJENDRAN S, LIEW K M. Completeness requirements of shape functions for higher order finite elements [J]. Structural Engineering and Mechanics, 2000, 10(2): 93 - 110.
- [11] BATHE K J, HENDRIANA D, BREZZI F, et al. Inf-sup test of upwinding methods [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, 48(5): 745 - 760.

Stability Study on US-FE-LSPIM QUAD4 Element Based on Numerical inf-sup Condition

JIA Cheng, CHEN Hui-hui

(School of Civil Engineering, Yancheng Institute of Technology, Yancheng 224051, China)

Abstract: US-FE-SPIM QUAD4 element is constructed by using classical QUAD4 element isoparametric shape functions sets and FE-LSPIM QUAD4 element shape functions sets as test functions and the trial functions respectively. The former is used for requirements of intra-element and inter-element continuity in displacement field, and the latter is for requirements of completeness in displacement field. US-FE-SPIM QUAD4 element could easily fulfil exact essential boundary condition along the entire length of the edge. This element has good precision and insensitivity to mesh distortion, and satisfies the consistency requirement. Further studies on stability of US-FE-SPIM QUAD4 element for convergence are made in this paper. Because an analytical proof of whether the inf-sup condition is satisfied by a specific element is difficult, in this paper, the formulation of numerical inf-sup condition for this element is derived and whether the inf-sup condition is satisfied for this element is tested by the numerical method. Numerical examples show that US-FE-SPIM QUAD4 element could pass numerical inf-sup testing, satisfying the stability requirement. And this paper offers a simple way to test element stability.

Key words: US-FE-LSPIM QUAD4 element; consistency requirement; stability requirement; inf-sup condition