

文章编号:1671-6833(2012)06-0125-04

# 一种单位分解三角形单元及其在动力响应分析中的应用

贾程, 陈卉卉

(盐城工学院 土木工程学院, 江苏 盐城 224051)

**摘要:** 基于单位分解方法,使用通常的三角形“单元”形函数作单位分解函数,多项式基函数用来作局部近似函数,提出有限元无网格耦合三角形单元.该三角形单元综合了有限元和无网格点插值法的优点,其形函数可看成是两种方法的复合函数,具有 Kronecker delta 性质,能够像有限元一样直接施加位移边界条件,采用该单元分析了二维固体的自由振动和强迫振动响应.计算结果表明:该单元没有虚假的零能模式,计算结果的精度优于线性三角形单元和线性四边形等单元.

**关键词:** 单位分解;局部近似;自由振动;强迫振动

**中图分类号:** O343.1 **文献标志码:** A **doi:**10.3969/j.issn.1671-6833.2012.06.030

## 0 引言

目前,有限单元法已经被广泛地应用于解决各种工程问题,但该方法仍然存在一些缺陷.传统的有限单元法通常采用协调模型,使得刚度矩阵“过刚”,能导致计算所得位移和应力的精度下降,尤其对线性三角形单元而言更为明显;能使得等参单元对网格畸变敏感.学者们提出了许多提高有限元精度的方法,如非协调模式法<sup>[1-2]</sup>、四边形面积坐标法<sup>[3]</sup>、无网格法<sup>[4-5]</sup>等.近些年来,单位分解法<sup>[5-6]</sup>引起了研究者的注意.单位分解有限元法较普通有限元的优点是不需增加额外的节点,就能构造高阶的场函数,这为创建高效的单元格式提供了一种方法.另外,它能够自由地选择局部近似函数,这使其便于分析复杂问题.

笔者采用线性三角形“单元”形函数作单位分解函数,利用最小二乘法建立局部近似场函数进而构造有限元无网格耦合三角形单元.其形函数具有 Kronecker delta 性质.通过分析二维固体的自由振动和强迫振动响应,表明该单元没有虚假的零能模式,计算结果的精度优于线性三角形单元和线性四边形等单元.

## 1 有限元无网格耦合三角形单元公式

### 1.1 有限元无网格耦合三角形单元的形函数

对于二维线弹性问题,采用三角形网格离散

问题域,如图 1 所示.单元内任一点的位移可表示成:

$$u(x, y) = N'u^e. \quad (1)$$

其中:  $N' = [N_1, N_2, N_3]$  是传统的线性三角形单元的形函数矩阵<sup>[7]</sup>;  $u^e = \{u_1(x, y), u_2(x, y), u_3(x, y)\}^T$  是局部节点位移函数.在该节点处等于其位移值,即  $u_i(x_i, y_i) = u_i, i = 1, 2, 3$ .局部节点位移函数  $u_i(x, y)$  利用 Rajendran 等<sup>[6]</sup>使用的最小二乘点插值无网格法(LSPIM),由  $i$  点的支持域内的节点值拟合得到:

$$u_i(x, y) = \Phi_i u_i, i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

式中:  $\Phi_i = [\Phi_1^i, \Phi_2^i, \Phi_3^i, \dots, \Phi_N^i], i = 1, 2, 3; u_i = [u_1, u_2, u_3, \dots, u_N]^T$ .

其中,  $\Phi_i$  是 LSPIM 法的关于节点  $i$  的形函数矩阵,  $u_i$  是节点  $i$  支持域内节点的位移参数向量,  $N$  为节点  $i$  支持域内的所有节点数.一个单元所有节点支持域的合集构成了一个单元的支持域  $\Omega$ .

节点支持域和单元支持域的定义如图 1 所示:

将式(2)代入式(1),得

$$u(x, y) = N'(\Phi u) = (N'\Phi)u = \Psi u. \quad (3)$$

从方程(3)中,可以得到该单元的形函数矩阵,设单元支持域  $\Omega$  内的节点数为  $M$ :

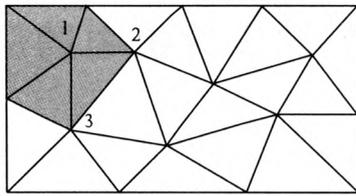
收稿日期:2012-07-01;修回日期:2012-09-03

基金项目:国家建设部项目(2010-K4-38);盐城工学院人才基金项目(XKR2011016)

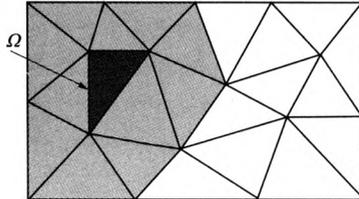
作者简介:贾程(1981-),男,江苏镇江人,盐城工学院讲师,博士,主要从事结构仿真计算, E-mail: jctonn@

163.com.

$$\Psi = N^T \Phi = [\Psi_1 \ \Psi_2 \ \Psi_3 \ | \ \Psi_4 \ \cdots \ \Psi_M] \quad (4)$$



(a) 节点支持域



(b) 单元支持域

图1 支持域的定义

Fig. 1 Definition of the support.

1.2 局部节点位移函数的形函数  $\Phi_i$

局部节点位移可以写成下列形式:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{P} \mathbf{a} \quad (5)$$

式中,  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & y_N & x_N^2 & x_N y_N & y_N^2 \end{bmatrix};$

$$\mathbf{u}_i = [u_i \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ \cdots \ u_N]^T;$$

$$\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ \cdots \ a_6]^T.$$

为方便起见,该单元的第一个节点记为节点  $i$ .

由于传统的最小二乘近似  $\mathbf{a} = (\mathbf{P}^T \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{u}_i$  使得节点  $i$  的位移近似值不等于该点的位移值,即  $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{p}(x_i, y_i) \mathbf{a}$ , 导致位移条件施加比较困难. 故为了使节点  $i$  的位移近似值等于该点的位移值,利用方程(5)中的第一个方程解出  $a_1$ ,再从方程(5)其余的方程中消去  $a_1$ ,可得

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{a}} \quad (6)$$

其中,  $\bar{\mathbf{P}} =$

$$\begin{bmatrix} x_2 - x_i & y_2 - y_i & x_2^2 - x_i^2 & x_2 y_2 - x_i y_i & y_2^2 - y_i^2 \\ x_3 - x_i & y_3 - y_i & x_3^2 - x_i^2 & x_3 y_3 - x_i y_i & y_3^2 - y_i^2 \\ x_4 - x_i & y_4 - y_i & x_4^2 - x_i^2 & x_4 y_4 - x_i y_i & y_4^2 - y_i^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N - x_i & y_N - y_i & x_N^2 - x_i^2 & x_N y_N - x_i y_i & y_N^2 - y_i^2 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{a}} = [a_2 \ a_3 \ a_4 \ \cdots \ a_6]^T;$$

$$\bar{\mathbf{u}}_i = [u_2 - u_i \ u_3 - u_i \ u_4 - u_i \ \cdots \ u_N - u_i].$$

则由最小二乘法得

$$\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{u}}_i \quad (7)$$

其中,  $\bar{\mathbf{Q}} = (\bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{P}})^{-1} \bar{\mathbf{P}}^T$ .

节点  $i$  邻域内位移又可以表示为

$$u_i(x, y) = a_1 + \bar{\mathbf{p}}(x, y) \bar{\mathbf{a}}, \quad (8)$$

则  $u_i = a_1 + \bar{\mathbf{p}}(x_i, y_i) \bar{\mathbf{a}} \quad (9)$

并将式(7)、(9)代入式(8)可得  $u_i(x, y)$  表达式

$$u_i(x, y) = u_i + \bar{\mathbf{q}} \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{u}}_i \quad (10)$$

其中,  $\bar{\mathbf{q}} \equiv \bar{\mathbf{q}}(x, y) = \bar{\mathbf{p}}(x, y) - \bar{\mathbf{p}}(x_i, y_i);$

$$\bar{\mathbf{p}}(x, y) = [x \ y \ x^2 \ xy \ y^2];$$

$$\bar{\mathbf{p}}(x_i, y_i) = [x_i \ y_i \ x_i^2 \ x_i y_i \ y_i^2].$$

$u_i(x, y)$  表达式(10)可简写成:

$$u_i(x, y) = \Phi_i \mathbf{u}_i \quad (11)$$

此处,  $\Phi_i$  为局部节点位移函数的形函数,可写成:

$$\Phi_i = [1 - (\bar{\mathbf{q}} \ \bar{\mathbf{Q}} \ \mathbf{I}) | \bar{\mathbf{q}} \ \bar{\mathbf{Q}}] \quad (12)$$

其中  $\mathbf{I}$  为所有元素均为 1 的  $(N-1)$  行列向量,利用式(4)进而可以求出单元的形函数矩阵  $\Psi$ .

从式(10)可以看出,对于  $(x_i, y_i)$  点存在  $u_i(x_i, y_i) = u_i$ ,再根据式(4)可得  $\Psi = [1, 0, 0 | 0, \dots, 0]$ . 同理对于  $i=2, 3$  点,存在. 故该有限元无网格耦合三角形单元的形函数具有 Kronecker delta 性质,能够像普通的有限元一样直接施加位移边界条件.

1.3 自由振动和强迫振动分析

由哈密顿原理,可得系统的运动方程为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (13)$$

其中,  $\mathbf{K} = \sum_{e=1}^n \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega^{(e)} \quad (14)$

为有限元无网格耦合三角形单元的刚度矩阵,位移应变矩阵  $\mathbf{B}$  的维数是  $3 \times 2M$ ,  $M$  为单元支持域  $\Omega$  内的节点数.

$\mathbf{M}$  为质量矩阵:

$$\mathbf{M} = \sum_{e=1}^n \int_{\Omega^{(e)}} \rho \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} d\Omega^{(e)} \quad (15)$$

其中,  $\mathbf{Q}$  是(4)式中元素组成的  $2 \times 2M$  矩阵.

$\mathbf{C}$  为阻尼矩阵,为简便起见,取瑞利阻尼:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (16)$$

其中  $\alpha, \beta$  是瑞利阻尼系数.

荷载列阵  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F} = \sum_{e=1}^n \left( \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T b^{(e)} d\Omega^{(e)} + \int_{\Gamma^{(e)}} \mathbf{N}^T t^{(e)} d\Gamma^{(e)} \right) \quad (17)$$

文中运动方程(13)的求解采用 Newmark 方法<sup>[7-8]</sup>,求解参数取  $\alpha=0.25, \delta=0.5$ .

若阻尼和荷载项为零,则得自由振动方程:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{d} = 0. \quad (18)$$

## 2 数值算例

### 2.1 锥形梁的自由振动

如图2(a)所示锥形悬臂梁,梁厚  $t=0.05\text{ m}$ ,弹性模量  $E=200\text{ GPa}$ ,泊松比  $\mu=0.3, \rho=8\ 000\text{ kg/m}^3$ ,为了与四边形等参元比较,采用  $6 \times 4$  形式划分网格,如图2(b)所示,四边形采用畸变的网格.前六阶频率计算结果列于表1.

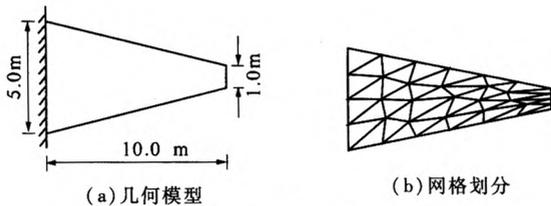


图2 锥形梁的几何模型和网络

Fig. 2 The geometry and mesh of the taper beam

从表1可以看出,有限元无网格耦合三角形单元没有出现虚假的零能模式,并且其结果的误差远小于线性三角形单元(FEM-T3)和四边形等参元(FEM-Q4).

表1 锥形梁的固有频率

Tab. 1 The natural frequencies for the taper beam

模态	FEM-T3		FEM-Q4		耦合单元		频率 参考值 <sup>[8]</sup>
	频率 /Hz	误差 /%	频率 /Hz	误差 /%	频率 /Hz	误差 /%	
1	51.33	15.03	47.46	6.36	44.83	0.46	44.623
2	163.72	25.91	156.65	20.47	135.28	4.04	130.03
3	171.06	5.14	163.71	0.62	162.93	0.14	162.70
4	341.63	38.85	322.06	30.89	276.78	12.49	246.05
5	408.38	7.50	406.12	6.90	396.47	4.36	379.90
6	587.24	50.02	563.33	43.91	544.06	38.99	391.44

### 2.2 悬臂梁的强迫振动

如图3(a)所示矩形悬臂梁,弹性模量  $E=1\text{ Pa}$ ,泊松比  $\mu=0.3, \rho=1.0\text{ kg/m}^3$ ,瑞利阻尼系数  $\alpha=0.005, \beta=0.272$ .采用  $10 \times 4$  划分网格,如图3(b)所示.考虑两种荷载工况.

(1)如图4(a)所示,在A点受一集中简谐荷载  $F(t) = \cos(\omega t)$ ,  $\omega=0.3$ ,计算时间取  $t=100\text{ s}$ ,时间步长取  $\Delta t=1\text{ s}$ .图5绘出了考虑阻尼时,线性三角形单元(FEM-T3)、四边形等参元(FEM-Q4)、八节点等参元(FEM-Q8)、本文耦合单元以

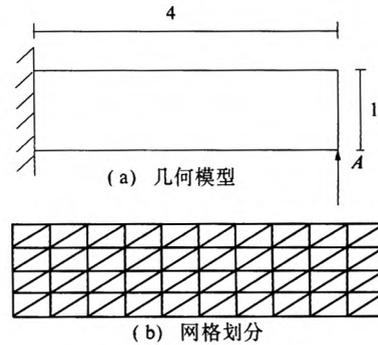


图3 矩形悬臂梁

Fig. 3 A rectangle cantilever beam

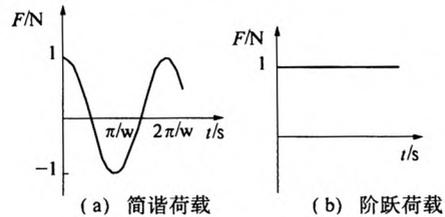


图4 荷载类型

Fig. 4 Type of loading

及理论解<sup>[9]</sup>的A点竖向位移的动力响应.从图上可以看出,本文耦合单元和八节点等参元的振幅都非常接近理论解,精度比四边形等参元高,远优于线性三角形单元.图6为无阻尼时,4种单元和理论解<sup>[9]</sup>的动力响应,同样可以看出,本文耦合单元的结果更接近理论解和八节点等参元,比四边形等参元和线性三角形单元精确.

上例自由振动和本例的结果说明笔者所提的耦合单元能够应用到动力响应分析中,并且具有较高的计算精度.

(2)如图4(b)所示,  $t=0\text{ s}$ 在A点受一突加集中荷载  $F=1\text{ N}$ ,持续时间  $t=2\ 000\text{ s}$ ,时间步长取  $\Delta t=1\text{ s}$ .利用笔者所提的耦合单元,计算A点竖向位移的动力响应,其结果与理论解<sup>[9]</sup>一并绘于图7.

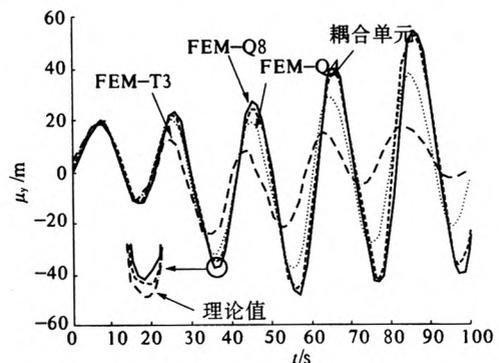


图5 简谐荷载作用下A点的竖向位移响应(有阻尼)  
Fig. 5 Vertical displacement responses of A point for beam subjected to a harmonic loading (with damping)

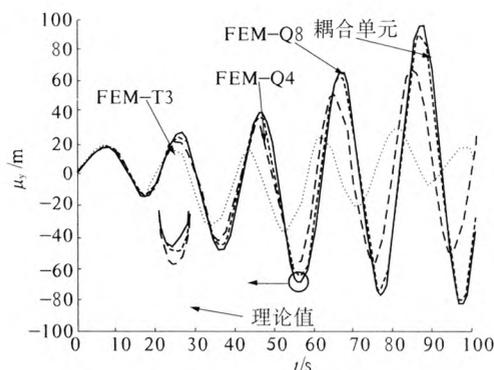


图6 简谐荷载作用下A点的竖向位移响应(无阻尼)  
Fig.6 Vertical displacement responses of A point for beam subjected to a harmonic loading(no damping)

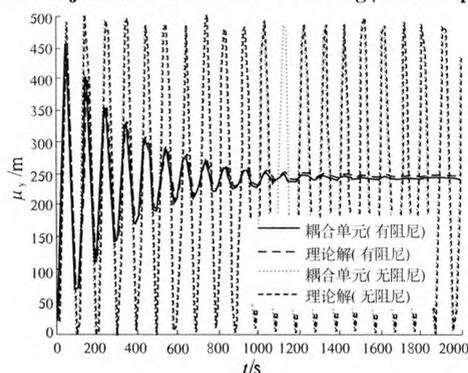


图7 阶跃荷载作用下A点的竖向位移响应  
Fig.7 Vertical displacement responses of A point for beam subjected to a step loading

从图7同样可以看出,该耦合单元精度较高.在没有阻尼时,A点在做振幅是接近常数的受迫振动.考虑阻尼时,由于阻尼的作用,位移的振动响应随着时间的延长而迅速衰减,直至消失.

### 3 结论

将有限元无网格耦合三角形单元应用于分析

## A Partition of Unity Triangle Finite Element and Its Application to Vibration Analysis

JIA Cheng, CHEN Hui-hui

(School of Civil Engineering, Yancheng Institute of Technology, Yancheng 224051, China)

**Abstract:** A new triangle element, combining meshfree and finite element methods, is developed based on partition of unity, using the polynomial basis functions for the local approximation and the shape functions of classical linear triangle element for partition of unity functions. This triangle element synthesizes the strengths of the meshfree and finite element methods, whose shape function can be understood as composite function of the two methods and has Kronecker delta property so as to implement displacement conditions directly like finite element methods. The element is applied to free vibration and forced vibration analysis of two-dimensional solids. Numerical results show that the present triangle element does not have spurious zero-energy modes and its results are more accurate than that of classical linear triangle element and classical isoparametric quadrilateral element.

**Key words:** partition of unity; local approximation; free vibration; forced vibration

二维固体的自由振动和强迫振动响应.通过典型的数值算例计算表明,该单元不存在虚假的零能模式,计算响应的振幅接近八节点等参元,其精度优于线性三角形单元和线性四边形等参元.该单元还可以应用到板、壳等结构的动力分析中.

### 参考文献:

- [1] WILSON E L, TAYLOR R L, DOHERTY W P, et al. Incompatible Displacement Modes in Numerical and Computer Models in Structural Mechanics [M]. New York: Academic Press, 1973: 43 - 57.
- [2] 秦力一, 许德刚, 周爱民. 基于切应力条件的广义协调等参元 [J]. 郑州大学学报: 工学版, 2005, 26 (2): 92 - 94.
- [3] 龙驭球, 李聚轩, 龙志飞, 等. 四边形单元面积坐标理论 [J]. 工程力学, 1997, 14 (3): 1 - 11.
- [4] BELYTSCHKO, LU Y Y, GU L. Element free Galerkin methods [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37 (2): 229 - 256.
- [5] BABUŠI, MELENK J M. The partition of unity method [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997, 40 (4): 727 - 758.
- [6] RAJENDRAN S, ZHANG B R. A "FE-meshfree" QUAD4 element based on partition of unity [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, 197 (1 - 4): 128 - 147.
- [7] 陈国荣. 有限单元法原理及应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2009: 310 - 319.
- [8] ABBASSIAN F, DAWSWELL D J, KNOWLES N C. Free Vibration Benchmarks [M]. Glasgow: National Agency for Finite Element Methods & Standards, 1987: 72 - 77.
- [9] 克拉夫, 彭津. 结构动力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006: 308 - 314.